

**TITULO: FUNCIONES CONTRÁCTILES
(CONTRACTIL FUNCTIONS)**

AUTOR: JOSÉ NICOLAS URRA RIOS
COAUTOR: BLADIMIR SAAVEDRA

DIRECCIÓN: Departamento de Ciencias. Núcleo de Nueva Esparta. Universidad de Oriente. Venezuela.

CORREO ELECTRÓNICO: webmaster@contractil.com

RESUMEN

Las funciones contráctiles aparecen de manera natural en el intento de calcular el valor numérico de la integral definida $\int_0^\alpha \frac{x^r dx}{(1+x^p)^q}$, $\alpha \geq 0$, siendo p, q, r números reales

arbitrarios. Tales funciones son inducidas por una serie de convergencia rápida, en la cual cada término está formado por un producto de dos factores, identificados, uno de ellos como Contracción Geométrica y el otro como Contracción Factorial. Las contracciones factoriales son algoritmos algebraicos relacionados con las funciones gama, beta y los coeficientes binomiales. Más allá del contexto de su aparición original, las funciones contráctiles (y sus funciones adyacentes) tienen un amplio espectro de aplicaciones teóricas y prácticas, especialmente, en Cálculo Numérico, Análisis Matemático, Estadística, Probabilidad y Ecuaciones Diferenciales. En este trabajo se presentan resultados preliminares de una investigación en curso sobre las propiedades de la familia de funciones contráctiles y sus funciones adyacentes.

PALABRAS CLAVES: Contracción Geométrica, Contracción Factorial, Función Contráctil, Función Adyacente.

ABSTRACT

The contractil functions appear in a natural way in the intent of calculating the numerical value of the defined integral, $\int_0^\alpha \frac{x^r dx}{(1+x^p)^q}$, $\alpha \geq 0$ being p,q, r, arbitrary real numbers. Such

functions are induced by a series of quick convergence, in the one which each terms are formed by a product of two identified factors, one of them as geometric contraction and the other one as factorial contraction. The factorial contractions are algebraic algorithms related with the functions Gamma, Beta and the binomial coefficients. But beyond of the context of their original appearance, the contractil functions (and their adjacent functions), they have a wide spectrum of theoretical and practical applications, especially, in Numerical Calculus, Mathematical Analysis, Statistics, Probability and Differential Equations. In this work

preliminary results of an investigation in development about the properties of the families of contractil functions and their adjacent functions are presented.

KEY WORDS: Geometric Contraction, Factorial Contraction, Contractil Function, Adjacent Function.

INTRODUCCIÓN

La mayoría de los conceptos matemáticos básicos que sirven como soporte teórico de las llamadas Funciones Contráctiles, hacen su aparición por primera vez en este trabajo. Así ocurre con las nociones de Contracción Geométrica y Contracción Factorial. Estos conceptos tienen propiedades especiales que permiten simplificar los procesos de cálculo. El conocimiento de tales propiedades es imprescindible para una lectura comprensiva de la teoría, de los resultados obtenidos y de los objetivos finales que se persiguen. Los autores, percatándose de este hecho, realizaron un esfuerzo por presentar este documento en forma auto-contenida (auto-referente). Por esta razón, se dan desde el inicio las definiciones necesarias y se muestran en cada caso, las propiedades que serán utilizadas. Respecto de los teoremas, sólo se demuestran aquellos considerados principales. Para el resto se insinúa el método de prueba. No hay bibliografía previa. La Serie de Contracciones se revela por primera vez ligada a ciertos métodos de cálculo en un trabajo sobre integración numérica. Tal trabajo permanece inédito.

1.- Contracciones

Las siguientes definiciones se aplican a cada par de números reales no negativos α, q .

1.1 La expresión $\alpha(1+\alpha)^{-1}$ es referida como “Primera Contracción de α ” (Contracción absoluta) y se denota por $1 \oplus \alpha$

1.2 Por “ q – contracción geométrica de α ” en grado k se entiende $(1 \oplus \alpha)^{q+k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, \alpha \neq 0$. Si $\alpha = 0$, toda q contracción geométrica de α se considera nula.

1.3 La “ q – contracción factorial de α ” en grado k , denotada por $1^{(q,k|\alpha)}$ se define por recurrencia mediante las relaciones:

$$1.3.1 \quad 1^{(q,0|\alpha)} = 1$$

$$1.3.2 \quad 1^{(q,k|\alpha)} = (1 \oplus (q+k)\alpha) 1^{(q,k-1|\alpha)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

2.- Serie de Contracciones

Por serie de contracciones se entenderá la serie:

$$2.1 \quad \sum_{k=0}^{\infty} (1 \oplus \alpha^p)^{q+k+1} \cdot 1^{(q,k|p)}$$

Es necesario que α, p no se anulen simultáneamente.

Para cada par de números reales no negativos p, q la serie 2.1 define una función continua y derivable $\mathcal{H}_{p,q}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^+$,

$$2.2 \quad \mathcal{H}_{p,q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 \oplus x^p)^{q+k+1} \cdot 1^{(q,k|p)}$$

El siguiente teorema muestra una relación funcional entre $\mathcal{H}_{p,q}$ y su primera derivada.

2.3 Teorema

$$\frac{d}{dx} \mathcal{H}_{p,q}(x) = x^{-1} ((p-1) \mathcal{H}_{p,q}(x) + (1+pq)(1 \oplus x^p)^{q+1})$$

En la demostración de éste teorema se hace uso de las definiciones anteriores y de algunas propiedades elementales de las contracciones a saber:

$$2.3.1 \quad (1 \oplus \alpha)(1 + \alpha) = \alpha, \quad \alpha \geq 0$$

$$2.3.2 \quad (1 \oplus \alpha)(1 + \alpha^{-1}) = 1, \quad \alpha > 0$$

$$2.3.3 \quad \frac{d}{dx} (1 \oplus x^p) = px^{-p-1} (1 \oplus x^p)^2, \quad x > 0$$

$$2.3.4 \quad \frac{d}{dx} (1 \oplus x^{-p}) = -px^{p-1} (1 \oplus x^{-p})^2, \quad x > 0$$

Demostración del teorema 2.3

(Consideramos el caso $p > 0$). Derivando término a término la serie 2.2 se obtiene:

$$2.3.5 \quad \frac{d}{dx} \mathcal{H}_{p,q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (q+k+1) (1 \oplus x^p)^{q+k+2} px^{-p-1} 1^{(q,k|p)} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (q+k+1)(1 \oplus x^p)^{q+k+2} p x^{-p-1} 1^{(q,k+1|p)} \left(1 + (q+k+1)^{-1} p^{-1}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (q+k+1)(1 \oplus x^p)^{q+k+2} p x^{-p-1} 1^{(q,k+1|p)} + \sum_{k=0}^{\infty} (1 \oplus x^p)^{q+k+2} x^{-p-1} 1^{(q,k+1|p)}
 \end{aligned} \tag{1.3.2, 2.3.2}$$

Cambio de índices: $i = k + 1$

$$\begin{aligned}
 2.3.6 \quad \frac{d}{dx} \mathcal{H}_{p,q}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (q+i)(1 \oplus x^p)^{q+i+1} p x^{-p-1} 1^{(q,i|p)} + \sum_{i=1}^{\infty} (1 \oplus x^p)^{q+i+1} x^{-p-1} 1^{(q,i|p)} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} (q+i)(1 \oplus x^p)^{q+i+1} p x^{-p-1} 1^{(q,i|p)} + \sum_{i=0}^{\infty} (1 \oplus x^p)^{q+i+1} p x^{-p-1} 1^{(q,i|p)} \\
 &\quad - p x^{-p-1} \mathcal{H}_{p,q}(x) + x^{-p-1} \mathcal{H}_{p,q}(x) - x^{-p-1} (1 \oplus x^p)^{q+1} - p q x^{-p-1} (1 \oplus x^p)^{q+1} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} (q+i+1)(1 \oplus x^p)^{q+i+1} p x^{-p-1} 1^{(q,i|p)} - (p-1) x^{-p-1} \mathcal{H}_{p,q}(x) \\
 &\quad - (1+pq) x^{-p-1} (1 \oplus x^p)^{q+1}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Aplicando 2.3.2 y 2.3.5 se tiene:

$$2.3.7 \quad \frac{d}{dx} \mathcal{H}_{p,q}(x) = (1+x^{-p}) \frac{d}{dx} \mathcal{H}_{p,q}(x) - x^{-p-1} ((p-1) \mathcal{H}_{p,q}(x) + (1+pq)(1 \oplus x^p)^{q+1})$$

De donde

$$2.3.8 \quad \frac{d}{dx} \mathcal{H}_{p,q}(x) = x^{-1} ((p-1) \mathcal{H}_{p,q}(x) + (1+pq)(1 \oplus x^p)^{q+1})$$

Lo que prueba el teorema

Es en general, conveniente usar la notación $\mathcal{H}_{p,0} = \mathcal{H}_p$. En tal caso, el teorema 2.3 toma la forma

$$2.3.9 \quad \frac{d}{dx} \mathcal{H}_p(x) = x^{-1} ((p-1) \mathcal{H}_p(x) + (1 \oplus x^p))$$

3.- Funciones Contráctiles

Sean p, q números reales no negativos. La función $\leftarrow_{p,q}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$,

$$3.1 \quad \leftarrow_{p,q}(x) = x^{1-p} H_{p,q}(x)$$

será referida como *Función Contráctil*.

La relación $0 \leq x^{-p} H_{p,q}(x) \leq 1$, demostrable a partir de la definición 2.2, implica que $\lim_{x \rightarrow 0} \leftarrow_{p,q}(x) = 0$, permitiendo la extensión continua de $\leftarrow_{p,q}$ al dominio de los números reales no negativos, definiendo $\leftarrow_{p,q}(0) = 0$

Derivando en 3.1 y aplicando el teorema 2.3 se tiene

$$3.2 \quad \frac{d}{dx} \leftarrow_{p,q}(x) = (1 + pq)x^{-p} (1 \oplus x^p)^{q+1}, \quad x > 0$$

Denotando $\leftarrow_{p,0}(x) = \leftarrow_p(x)$ y haciendo uso de 3.2, se encuentra

$$3.3 \quad \frac{d}{dx} \leftarrow_p(x) = 1 \oplus x^{-p} = \frac{1}{1 + x^p}, \quad p > 0$$

Definiendo ahora $\leftarrow_{-p}(x) = x \cdot \leftarrow_p(x)$, $p \geq 0$ se obtiene la familia de funciones $\left\{ \leftarrow_p \right\}_{p \in \mathbb{R}}$.

Para $\leftarrow_{-p}(x)$ se tiene que,

$$3.4 \quad \frac{d}{dx} \leftarrow_{-p}(x) = \frac{1}{1 + x^{-p}}, \quad p > 0$$

Las fórmulas 3.3 y 3.4 resuelven el problema de calcular mediante funciones elementales de variable real, la integral $\int \frac{dx}{1 + x^p}$, siendo p un número real arbitrario.

$$3.5 \quad \int \frac{dx}{1 + x^p} = \leftarrow_p(x) + C, \quad p \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0$$

Para los casos $p = 1$, $p = 2$, la evaluación numérica de la integral definida $\int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^p}$, $\alpha \geq 0$, muestra que las funciones logaritmo natural y arcotangente son funciones contráctiles.

$$3.6 \quad \ln(1+\alpha) = \left\langle 1 \right\rangle (\alpha), \quad \alpha \geq 0$$

$$3.7 \quad \text{ArcTg}(\alpha) = \left\langle 2 \right\rangle (\alpha), \quad \alpha \geq 0$$

Mostraremos ahora algunos teoremas útiles en el desarrollo de la teoría de funciones contráctiles.

3.8 Teorema.

$$\mathcal{H}_{p,q+1}(x) = (1 \oplus p(q+1))^{-1} (\mathcal{H}_{p,q}(x) - (1 \oplus x^p)^{q+1})$$

Este teorema es una consecuencia de la siguiente propiedad de las contracciones factoriales.

$$3.9 \quad 1^{(q+1,k|p)} = (1 \oplus p(q+1))^{-1} 1^{(q,k+1|p)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A partir de 3.8, se demuestra un importante teorema.

3.10 Teorema

$$\left\langle p, q+1 \right\rangle (x) = (1 \oplus p(q+1))^{-1} (\left\langle p, q \right\rangle (x) - x^{1-p} (1 \oplus x^p)^{q+1})$$

Según el teorema 3.10, el valor de $\left\langle p, q \right\rangle (x)$ para cualquier valor de q , se obtiene conociendo $\left\langle p, r \right\rangle (x)$ para algún valor r tal que $0 \leq r < 1$.

Veremos otra característica relevante de este teorema. En efecto, escribamos 3.10 en la siguiente forma:

$$3.11 \quad \left\langle p, q \right\rangle (x) = x^{1-p} (1 \oplus x^p)^{q+1} + (1 \oplus p(q+1)) \left\langle p, q+1 \right\rangle (x)$$

La fórmula 3.11 puede ser usada para extender el concepto de función contráctil a valores negativos de q . Para ello, es necesario hacer algunos ajustes en las notaciones.

3.12 Se usará la notación $1 \oplus \alpha$ en lugar de $\alpha(1+\alpha)^{-1}$, para cada número real $\alpha \neq -1$.

3.13 Para cada par de números reales $p, q, p \geq 0$; y cada número entero no negativo k ; la notación $1^{(q,k|p)}$ será usada con el siguiente significado:

$$3.13.1 \quad 1^{(q,0|p)} = 1$$

$$3.13.2 \quad 1^{(q,k|p)} = (1 \oplus p(q+k)) 1^{(q,k-1|p)}$$

siempre que, para cada entero i , $0 < i \leq k$, ocurra que $p(q+i) \neq -1$.

Las definiciones que se dan a continuación, constituyen una generalización de las funciones contráctiles. En cada caso, p, q, x son números reales, $p \geq 0, x > 0$.

$$3.14 \quad \left\langle_{1,-2}(x) := (1 \oplus x)^{-1} - \ln x$$

3.15 Si $pq = -1$,

$$\left\langle_{p,q-1}(x) := x(1 \oplus x^p)^{q-1} - \left\langle_{1,q-1}(x^{-p})$$

3.16 Si $pq \neq -1$,

$$\left\langle_{p,q-1}(x) := x^{1-p}(1 \oplus x^p)^q + (1 \oplus pq) \left\langle_{p,q}(x)$$

Las tres definiciones anteriores parecen extrañas; pero son coherentes y sirven de base para ampliar la teoría sobre funciones contráctiles.

Puede probarse que estas funciones siguen la misma regla de derivación 3.2 cuya demostración se insinúa para los casos $p \geq 0, q \geq 0$.

El siguiente teorema es útil en el cálculo numérico, cuando se recurre a funciones contráctiles.

3.17 Teorema. Si $pq = -1$, entonces $\left\langle_{p,q}(x)$ está definida en $x = 0$ y además $\left\langle_{p,q}(x) = 1$ para cada $x \geq 0$.

Demostración. 1) Derivando según la fórmula 3.2 se obtiene $\frac{d}{dx} \left\langle_{p,q}(x) = 0, x > 0$

Mostrando que $\left\langle_{p,q}$ es una función constante en el intervalo $(0, \infty)$.

2) Como $pq = -1$, entonces $p(q+n) \neq -1$, para cada $n = 1, 2, \dots$

3) Aplicando a $\left\langle_{p,q}$ la definición 3.16 se tiene

$$\left\langle_{p,q}(x) = x^{1-p}(1 \oplus x^p)^{q+1} + (1 \oplus p(q+1)) \left\langle_{p,q+1}(x)$$

4) Sea n un número entero tal que $q+n \geq 0$. Si se usa 3 en forma recurrente, se prueba que:

$$\left\langle_{p,q}(x) = 1^{(q,n|p)} \left\langle_{p,q+n}(x) + \frac{1}{(1+x^p)^{q+1}} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (1 \oplus x^p)^k \cdot 1^{(q,k|p)}\right)$$

El segundo miembro de esta igualdad es una función continua y derivable, que está definida en $x = 0$ y tiene allí justamente el valor 1. Esto completa la demostración del teorema.

Los siguientes ejemplos muestran algunas funciones contráctiles que se pueden expresar en términos de funciones elementales conocidas.

$$3.18 \quad \left\langle_{p,-1}(x) = x^{1-p}, \quad (\text{Def. 3.16})$$

3.19 Si $p = 1$, se tiene $\left\langle_{1,-1}(x) = 1$ concordando con el teorema 3.17.

$$3.20 \quad \left\langle_{2,1} (x) = \frac{3}{2} \left(\text{Arctg}x - \frac{x}{1+x^2} \right) \quad (3.7 \text{ y } 3.10)$$

$$3.21 \quad \left\langle_{\frac{1}{2}, -2} (x) = x^{\frac{1}{2}} (1 \oplus x^{\frac{1}{2}})^{-1} + (1 \oplus \left(\frac{-1}{2}\right)) \left\langle_{\frac{1}{2}, -1} (x), \quad (3.16)$$

$$= x^{\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{-1}{2}}) - x^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1, \quad \text{Ilustrando también 3.17}$$

4.- Función Contráctil Adyacente

Para cada par de números reales p, q , $p \geq 0$, se entenderá por Función Contráctil Adyacente la función $\sqcup_{p,q}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como sigue.

Para cada $x \in \mathbb{R}^+$,

$$4.1 \quad \sqcup_{p,q}(x) = x(1 \oplus x^p)^{q-1} - \left\langle_{p,q-1}(x)$$

Aplicando 3.2 para derivar 4.1, se tiene

$$4.2 \quad \frac{d}{dx} \sqcup_{p,q}(x) = (1 \oplus x^p)^q$$

Mostrando que $\sqcup_{p,q}$ es una función primitiva para $(1 \oplus x^p)^q$.

Veremos algunos resultados que muestran el poder de resolución de $\sqcup_{p,q}$. Cuando sea conveniente usaremos las notaciones alternativas:

$$\mathcal{H}_{p,q}(x) = \mathcal{H}(x|p, q), \quad \left\langle_{p,q}(x) = \left\langle(x|p, q), \quad \sqcup_{p,q}(x) = \sqcup(x|p, q).$$

Si p, q, r son números reales tales que $p \geq 0, r > -1$, entonces,

$$4.3 \quad \int x^r (1 \oplus x^p)^q dx = \frac{1}{1+r} \sqcup_{p,q} \left(x^{1+r} \left| \frac{p}{1+r}, q \right. \right) + C, \quad C: \text{ constante.}$$

La comprobación es una aplicación directa de 4.2. Si se quiere eliminar la restricción $r > -1$ en 4.3, es necesario considerar previamente una sencilla identidad referida a contracciones:

$$4.4 \quad x^{-p} (1 \oplus x^p)^q = (1 \oplus x^p)^{q-1} - (1 \oplus x^p)^q$$

La identidad 4.4 proviene de una forma más general. Si n es un número entero no negativo, entonces

$$4.5 \quad x^{-np} (1 \oplus x^p)^q = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (-1)^k (1 \oplus x^p)^{q-(n-k)}$$

Calcularemos la integral del primer miembro de 4.3, siendo p, q, r números reales con la única restricción $p \geq 0$.- Sea n un número entero no negativo tal que $1+r+np > 0$, luego,

$$4.6 \quad \int x^r (1 \oplus x^p)^q dx = \int x^{r+np} \cdot x^{-np} (1 \oplus x^p)^q dx = \int x^{r+np} \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (-1)^k (1 \oplus x^p)^{q-(n-k)} dx, \quad (4.5)$$

De donde,

$$4.7 \quad \int x^r (1 \oplus x^p)^q dx = \frac{1}{1+r+np} \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (-1)^k \sqcup_{p,q} \left(x^{1+r+np} \left| \frac{p}{1+r+np}, q-(n-k) \right. \right) + C, \quad (4.3)$$

Es claro que en 4.7, basta elegir n como el menor entero no negativo que satisface la condición $1+r+np>0$.

Consideremos las siguientes identidades:

$$4.8 \quad x^m(1+x^n)^s = x^r(1 \oplus x^p)^q, \text{ donde } r = m, p = -n, q = -s.$$

$$4.9 \quad x^m(1+x^n)^s = x^r(1 \oplus x^p)^q, \text{ donde } r = m + ns, p = n, q = -s.$$

En alguna de estas identidades es $p \geq 0$.

Las identidades 4.8, 4.9 muestran que la integral 4.7 alcanza los métodos de integración de las integrales de diferenciales binomias de la forma

$$4.10 \quad \int x^m(1+x^n)^s dx$$

Es bien sabido que el matemático ruso *P.L.CHEBISHEV* (1821-1894) determinó las condiciones bajo las cuales la integral 4.10 con exponentes racionales, puede expresarse mediante funciones elementales. Sus métodos han servido de guía universal para calcular este tipo de integrales.

Si se desea sostener la letra del teorema de *CHEBISHEV* distante de la fórmula 4.7 es necesario estipular que las funciones contráctiles o algunos miembros de la familia de tales funciones, son funciones no-elementales.

Sin embargo, es útil advertir que el cálculo a través de la serie de contracciones no presenta dificultades significativas, especialmente si se recurre a calculadoras.

El joven Daniel Saavedra, estudiante de Informática en el Núcleo de Nueva Esparta de la Universidad de Oriente, realizó un programa de computación para evaluar numéricamente con la aproximación deseada, las funciones contráctiles del tipo $\left\langle_{p,q}(x)\right\rangle$, siendo p, q números reales no negativos. Tal programa se encuentra disponible.

Actualmente, Saavedra trabaja en la programación de $\left\langle_{p,q}(x)\right\rangle$, para $p \geq 0$, q un número real arbitrario.

5.- Aplicaciones a la Integración Numérica

Los ejemplos que se muestran a continuación no son suficientes para observar en toda su magnitud el poder teórico y práctico de las funciones contráctiles. Sin embargo, bastan para mostrar que tal poder existe.

$$5.1 \quad \int_2^3 \frac{dx}{x^3(1+x^5)} = -\frac{1}{7} \left\langle_{\frac{5}{7}}(3^{-7})\right\rangle + \frac{1}{7} \left\langle_{\frac{5}{7}}(2^{-7})\right\rangle \\ \approx \frac{1}{7}(-0.00046 + 0.00767) \approx 0.00103$$

La aproximación en 5.1 se obtuvo con una calculadora Casio fx3600Pv.

$$5.2 \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\pi} = \left\langle_{\pi}(1)\right\rangle \approx 0.8409432554551$$

En la aproximación se usó el programa de D. Saavedra.

$$5.3 \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^{\sqrt{3}}} = \left\langle_{\sqrt{3}}(1) \approx 0.76639713380 \quad (\text{D. Saavedra})$$

$$5.4 \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\pi}} \approx 1.1884 \quad (\text{fx3600Pv})$$

$$5.5 \quad \int_0^1 \text{ArcTg}(x^7) dx = \int_0^1 \left\langle_2(x^7) dx = \left\langle_2(1) - \frac{7}{8} \left\langle_{\frac{7}{4}}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{7}{22} \left\langle_{\frac{7}{11}}(1) - \frac{7}{8} \right. \right. \\ \approx 0.1135981311 \quad (\text{D. Saavedra})$$

$$5.6 \quad \int_0^1 \text{ArcTg}(x^{\pi}) dx = \int_0^1 \left\langle_2(x^{\pi}) dx \approx 0.217529 \quad (\text{fx3600Pv})$$

5.7 La ecuación diferencial $y' = (a + bx + cy)^r$, $a, b, c, r > 0$, tiene por solución general implícita la función $y = \varphi(x)$, tal que

$$5.7.1 \quad \left\langle_r \left(\left(\frac{c}{b} \right)^{\frac{1}{r}} (a + bx + c\varphi(x)) \right) = \left(\frac{c}{b} \right)^{\frac{1}{r}} bx + k, \quad k \text{ constante}$$

5.8 Considérese la región plana $D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq \alpha\}$ entonces,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y^5}{1+(xy^3)^7} dx dy &= \int_0^{\alpha} \int_0^y \frac{y^5}{1+(xy^3)^7} dx dy \\ &= \int_0^{\alpha} y^2 \left\langle_7(y^4) dy \\ &= \frac{1}{3} \alpha^3 \left\langle_7(\alpha^4) - \frac{4}{3} \int_0^{\alpha} \frac{y^6}{1+y^{28}} dy \\ &= \frac{1}{3} \alpha^3 \left\langle_7(\alpha^4) - \frac{4}{21} \left\langle_4(\alpha^7) \right. \end{aligned}$$

$$5.8.1 \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^3 dx dy}{1+(xy^3)^7} = \int_0^1 \left\langle_7(y^3) dy = \left\langle_7(1) - \frac{3}{4} \left\langle_4 \left(1 \left| \frac{21}{4} \right. \right) \right. \right. \\ \approx 0.91547952 - 0.669468067 \\ \approx 0.24601145 \quad (\text{D. Saavedra})$$

$$5.9 \quad \int_2^3 \frac{dx}{(x^2 - 1)^3}$$

La sustitución $u = (x^2 - 1)^{-3}$ induce la siguiente transformación.

$$5.9.1 \quad \int_2^3 \frac{dx}{(x^2 - 1)^3} = -\frac{1}{6} \int_{3^{-3}}^{8^{-3}} u^{-\frac{1}{3}} \left(1 \oplus u^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot du = \frac{1}{4} \left(\mathbb{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{9}\right) - \mathbb{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{64}\right) \right) \\ \approx 0.010486513325836377176 \quad (\text{D. Saavedra})$$

$$5.10 \quad \int_2^3 \frac{x^{\sqrt{17}}}{(1+x^{\sqrt{5}})^{\sqrt{3}}} dx = \int_2^3 x^{\sqrt{17}-\sqrt{15}} \left(1 \oplus x^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{3}} dx \quad (4.9) \\ = \frac{1}{1-\sqrt{15}+\sqrt{17}} \left(\mathbb{L} \left(3^{1-\sqrt{15}+\sqrt{17}} \left| \frac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{15}+\sqrt{17}}, \sqrt{3} \right. \right) - \mathbb{L} \left(2^{1-\sqrt{15}+\sqrt{17}} \left| \frac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{15}+\sqrt{17}}, \sqrt{3} \right. \right) \right) \\ \approx 1.01192199 \quad (\text{D. Saavedra})$$

$$5.11 \quad p > 1, \quad x \in (1, \infty)$$

$$\int \frac{dx}{x^p - 1} = \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{p} \mathbb{L} \left((x^p - 1)^{-1} \left| 1, \frac{p-1}{p} \right. \right) + \frac{1}{p} \mathbb{L} \left((x^p - 1)^{-1} \left| 1, \frac{2p-1}{p} \right. \right) + C$$

$$5.12 \quad \text{Si } r \geq 0, \quad 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \text{entonces}$$

$$5.12.1 \quad \int_0^\alpha \text{sen}^r x \, dx = \frac{1}{1+r} \left\langle \frac{1}{2, \frac{r}{2}} (\text{tg } \alpha) \right\rangle$$

$$5.12.2 \quad \int_0^\alpha \text{tg}^r x \, dx = \frac{1}{1+r} \left\langle \frac{1}{2, \frac{r}{1+r}} (\text{tg}^{1+r} \alpha) \right\rangle$$

$$5.12.3 \quad \int_0^\alpha \text{sec}^r x \, dx = \left\langle \frac{1}{\frac{2}{1+r}, \frac{r}{2}} (\text{tg}^{1+r} \alpha) \right\rangle$$

$$5.13 \quad \text{Si } r \geq 0, \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{entonces}$$

$$5.13.1 \quad \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \cos^r x \, dx = \frac{1}{1+r} \left\langle \frac{1}{2, \frac{r}{2}} (\text{ctg } \alpha) \right\rangle$$

$$5.13.2 \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^r x \, dx = \frac{1}{1+r} \left\langle \frac{2}{1+r} (\operatorname{ctg}^{1+r} \alpha) \right\rangle$$

$$5.13.3 \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{csc}^r x \, dx = \left\langle \frac{2}{1+r} \frac{-r}{2} (\operatorname{ctg}^{1+r} \alpha) \right\rangle$$

$$5.14 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^{\frac{1}{7}} x \, dx = \frac{7}{8} \left\langle \frac{1}{2, \frac{1}{14}} (1) \right\rangle \approx 0.66033712 \quad (\text{D. Saavedra})$$

$$5.15 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\sqrt{2}} x \, dx = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \left\langle \frac{2}{2, \frac{\sqrt{2}}{2}} (\sqrt{3}) \right\rangle \approx 0.40157753 \quad (\text{D. Saavedra})$$

$$5.16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x \, dx = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \left\langle \frac{2}{1+\sqrt{2}} (1) \right\rangle \approx 0.27727182 \quad (\text{D. Saavedra})$$