

FUNCIÓN GAMMA

(Sobre la evaluación de la función gamma)

J. N. Urra.^{1*}, B. Saavedra.^{2**}

¹UNIVERSIDAD DE ORIENTE, DEPARTAMENTO DE CIENCIAS, ÁREA DE MATEMÁTICAS, NUEVA ESPARTA-VENEZUELA

²UNIVERSIDAD DE ORIENTE, PROGRAMA DE ESTADÍSTICA, NUEVA ESPARTA-VENEZUELA

.....

Resumen

Se proporciona una fórmula para la evaluación de $\gamma(x)$, siendo x en cada caso un número racional perteneciente al intervalo $(0,1)$.

Palabras clave: Función Gamma, Función Contráctil, Función Beta-n, Fórmula de Potenciación.

1. Introducción

El método propuesto se fundamenta en la evaluación de la función Beta Central $B(x)$, $x > 0$, con alta precisión, a través de la función contráctil. La fórmula que constituye el resultado principal se obtiene posteriormente, de la aplicación de una Fórmula de Potenciación para la función gamma.

2. Función Beta-Central

La función Beta Central $B(x)$, para argumento real $x > 0$, se define del siguiente modo:

2.1.- $B(x) = B(x, x)$

donde $B(x, x) = \text{Beta}(x, x)$

* Profesor Titular. Email: calculo.contractil@gmail.com

** Profesor Instructor. Email: saavedra_62@hotmail.com

2.2.-Teorema.- Si $0 < x < 1$, entonces,

$$B(x) = \frac{2}{x} \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1)$$

Demostración.-

$$\begin{aligned} 2.2.1.- B(x) &= \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{2x}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{2x}} dt + \int_1^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{2x}} dt \\ &= \frac{1}{x} \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1) + \frac{1}{x} \left\langle \frac{1}{x}, 2x \right\rangle (1) \\ &= \frac{1}{x} \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1) + \frac{1}{x} \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1) \\ &= \frac{2}{x} \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1) \end{aligned}$$

‡

2.3.-Teorema.- Si $0 < x < 1$, entonces,

$$\left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1) = \frac{1}{4^x} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x(2x+1)\cdots(2x+k)}{2^{k+1}(x+1)(x+2)\cdots(x+1+k)} \right)$$

Demostración.-

$$\begin{aligned} 2.3.1.- \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1) &= \mathcal{H}_{\frac{1}{1-x}, 2x-1} (1) \quad , \quad 0 < x < 1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (1 \oplus 1)^{2x+k} 1^{(2x-1, k | \frac{1}{1-x})} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2x+k}} \tau_{2x}(2x+k, 1-x) \\ &= \frac{1}{4^x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_{2x}(x+1, k)}{2^k} \\ &= \frac{1}{4^x} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{2x}(x+1, k)}{2^k} \right) \\ &= \frac{1}{4^x} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_{2x}(x+1, k+1)}{2^{k+1}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4^x} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x(2x+1)\cdots(2x+k)}{2^{k+1}(x+1)(x+2)\cdots(x+1+k)} \right)$$

┆

2.4.-Teorema.- Si $0 < x < 1$, entonces,

$$B(x) = \frac{2}{x 4^x} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x(2x+1)\cdots(2x+k)}{2^{k+1}(x+1)(x+2)\cdots(x+1+k)} \right)$$

Demostración.- El Teor. 4 es una consecuencia inmediata de los Teoremas 2 y 3.

┆

2.5.-Teorema.- Para cada par de números reales positivos x, y ,

$$B(x+y) = B(x) \tau_x(2x, y) \tau_x(2x+y, y)$$

Demostración.- Es suficiente aplicar dos veces el Teorema de Factorización para la función Beta. En efecto,

$$\begin{aligned} 2.5.1.- B(x+y) &= B(x+y, x+y) \\ &= B(x+y, x) \tau_x(2x+y, y) \\ &= B(x, x) \tau_x(2x, y) \tau_x(2x+y, y) \\ &= B(x) \tau_x(2x, y) \tau_x(2x+y, y) \end{aligned}$$

┆

2.6.-Teorema.- Para cada número entero positivo x ,

$$B(x) = \frac{((x-1)!)^2}{(2x-1)!}$$

Demostración.- La fórmula proporcionada en el Teor. 6 es una conocida fórmula en la teoría general de la función beta.

┆

3. Las Funciones Beta-n, $n = 0, 1, \dots$

3.1.-Definición.- Las funciones Beta-n (B_n) para argumento real positivo, se definen por recurrencia, mediante las siguientes relaciones:

$$3.1.1.- B_0(x) = 1$$

$$3.1.2.- B_{n+1}(x) = B(2^n x) (B_n(x))^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

Nota: La familia de funciones Beta- n , $n = 0, 1, \dots$ ha sido introducida por J. N. Urrea.

3.2.- Ejemplos sobre evaluación numérica de $B_n(x)$, $x > 0$, $n = 1, 2, \dots$

$$3.2.1.- B_3\left(\frac{1}{2}\right) = B(2) \cdot B^2(1) \cdot B^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^4}{6}$$

$$3.2.2.- B_3\left(\frac{3}{4}\right) = B(3) \cdot B^2\left(\frac{3}{2}\right) \cdot B^4\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{30} \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 B^4\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{2430} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (3+2k)}{7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (7+4k)}\right)^4, \quad (\text{Teor. 2.4})$$

3.3.- Teorema.- Sea x un número entero positivo. Entonces,

$$B_n(x) = \frac{((x-1)!)^{2^n}}{(2^n x - 1)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

3.4.- Teorema.- Para cada número entero positivo n ,

$$B_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^{2^n}}{(2^n - 1)!}$$

3.5.- Ejemplos.-

$$3.5.1.- B_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^{2^2}}{(2^2 - 1)!} = \frac{\pi^4}{6}$$

$$3.5.2.- B_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^{2^4}}{(2^4 - 1)!} = \frac{\pi^{16}}{15!}$$

4. Sobre Factorización

4.1.- Notación.- Si q, r son números enteros positivos tales que, q es Divisor de r (Factor de r), se escribirá $q \text{ F } r$.

La fórmula $q \text{ F } r$ es por lo tanto, una interpretación del siguiente enunciado, referido a dos números enteros positivos q, r : "Existe un número entero positivo α tal que $q\alpha = r$ ".

4.2.- Ejemplos.

$$4.2.1.- 43 \text{ F } (7^3 + 1)$$

$$4.2.2.- (8^r + 1) \text{ F } (2^{12r} - 1), \quad r = 1, 2, \dots$$

$$4.2.3.- 13^3 F(2^{2028} - 1)$$

$$4.2.4.- 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13^2 F(2^{56160} - 1)$$

4.3.-Problema.-Dado un número entero positivo impar $q \geq 3$, determinar dos números enteros positivos α, n tales que $1 + q^\alpha = 2^n$.

Observación.- El Problema 4.3 es equivalente al siguiente:

4.4.-Problema.-Dado un número entero positivo impar $q \geq 3$, determinar un número entero positivo n tal que $q F(2^n - 1)$.

4.5.-Comentario.- El Problema 4.4 puede resolverse mediante una Conjetura propuesta por J. N. Urra.

4.5.1.- Conjetura: Si $\{q_i\}_{i=1}^{i=n}, \{\alpha_i\}_{i=1}^{i=n}$ son conjuntos de números enteros positivos tales que, para cada índice $i, 1 \leq i \leq n$ ocurre que q_i es primo, $q_i \geq 3$ y además $i \neq j \Rightarrow q_i \neq q_j, 1 \leq j \leq n$, entonces

$$\prod_{i=1}^{i=n} q_i^{\alpha_i} F\left(2^{\prod_{i=1}^{i=n} (q_i - 1) q_i^{\alpha_i - 1}} - 1\right)$$

Una forma particular que adopta la Conjetura de Urra es la siguiente:

4.5.2.- “Si q es un número entero primo y $q \geq 3$, entonces $q F(2^{q-1} - 1)$ ”.

Nota: La fórmula $q F(2^{q-1} - 1)$ ha sido comprobada por Oswaldo Bello para los números primos $q = 3, 5, 7, 11, \dots, 1223$.

Hay además, otra forma particular relevante, para la Conjetura de Urra.

4.5.3.- Si q, α son números enteros positivos tales que, q es primo y $q \geq 3$, entonces,

$$q^\alpha F(2^{(q-1)q^{\alpha-1}} - 1)$$

Un estudio a profundidad de la Conjetura de Urra, en su forma más general, ha sido realizado por B. Saavedra.

La comprobación para grandes números se ha hecho mediante el uso de Sistemas de Algebra Computarizada.

5. Sobre la evaluación de la Función Gamma

5.1.-Teorema. (Fórmula de Potenciación). Para cada número real positivo x y cada número entero positivo n ,

$$(\Gamma(x))^{2^n} = \Gamma(2^n x) B_n(x)$$

Demostración.- Inducción Completa.

5.1.1.-Si $n = 1$, se tiene la conocida fórmula

$$(\Gamma(x))^2 = \Gamma(2x) B(x, x)$$

5.1.2.-Hipótesis de Inducción.- Sea válido el Teorema para algún número entero positivo n .

5.1.3.-Para $n + 1$ se tiene,

$$\begin{aligned} (\Gamma(x))^{2^{n+1}} &= \left((\Gamma(x))^{2^n} \right)^2 \\ &= \left(\Gamma(2^n x) B_n(x) \right)^2, \quad (5.1.2) \\ &= \left(\Gamma(2^n x) \right)^2 \left(B_n(x) \right)^2 \\ &= \Gamma(2^{n+1} x) B(2^n x) \left(B_n(x) \right)^2, \quad (5.1.1) \\ &= \Gamma(2^{n+1} x) B_{n+1}(x), \quad (3.1.2) \end{aligned}$$

┆

5.2.-Comentario Importante.- Sean x, q, n números enteros positivos tales que, q es impar. Entonces, con arreglo a la fórmula de Potenciación para la función gamma, es suficiente evaluar previamente $\Gamma\left(\frac{x}{q}\right)$ para obtener posteriormente, el valor de $\Gamma\left(\frac{x}{2^n q}\right)$. En efecto,

$$5.2.1.- \left(\Gamma\left(\frac{x}{2^n q}\right) \right)^{2^n} = \Gamma\left(\frac{x}{q}\right) B_n\left(\frac{x}{2^n q}\right), \quad (\text{Teor. 5.1})$$

De donde,

$$5.2.2.- \Gamma\left(\frac{x}{2^n q}\right) = \left(\Gamma\left(\frac{x}{q}\right) B_n\left(\frac{x}{2^n q}\right) \right)^{\frac{1}{2^n}}$$

Un caso particular de la fórmula 5.2.2 se obtiene cuando $q = 1$. En este caso se tiene,

$$5.2.3.- \Gamma\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left((x-1)! B_n\left(\frac{x}{2^n}\right) \right)^{\frac{1}{2^n}}$$

5.3.-Teorema. Sean x, q, α, r números enteros positivos tales que, $0 < x < q$ y además $1 + q\alpha = 2^r$. Entonces

$$\Gamma\left(\frac{x}{q}\right) = \left(B_r\left(\frac{x}{q}\right) \prod_{i=0}^{i=x\alpha-1} \left(\frac{x}{q} + i\right) \right)^{\frac{1}{q\alpha}}$$

Demostración.- Con arreglo al enunciado del Teorema, es claro que debe ser q impar, $q \geq 3, r \geq 2$.

Ahora bien, aplicando la fórmula de Potenciación para la función gamma se tiene,

$$\begin{aligned} 5.3.1.- \left(\Gamma\left(\frac{x}{q}\right) \right)^{2^r} &= \Gamma\left(\frac{2^r x}{q}\right) B_r\left(\frac{x}{q}\right) \\ &= B_r\left(\frac{x}{q}\right) \Gamma\left(\frac{x}{q} + x\alpha\right) \\ &= B_r\left(\frac{x}{q}\right) \Gamma\left(\frac{x}{q}\right) \prod_{i=0}^{i=x\alpha-1} \left(\frac{x}{q} + i\right) \end{aligned}$$

De donde,

$$5.3.2.- \Gamma\left(\frac{x}{q}\right) = \left(B_r\left(\frac{x}{q}\right) \prod_{i=0}^{i=x\alpha-1} \left(\frac{x}{q} + i\right) \right)^{\frac{1}{q\alpha}}$$

†

5.4.-Comentario.- Las fórmulas 5.2.2 y 5.2.3, además del teorema 5.3 y la Conjetura de Urra son suficientes para evaluar $\Gamma\left(\frac{x}{y}\right)$, siendo x, y números enteros positivos tales que $0 < x < y$.

$$5.5.-Problema.- \text{Evaluar } \Gamma\left(\frac{7}{360}\right).$$

Solución.-

$$5.5.1.- \Gamma\left(\frac{7}{360}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2^3 \cdot 45}\right)$$

$$= \left(\Gamma\left(\frac{7}{45}\right) B_3\left(\frac{7}{360}\right) \right)^{\frac{1}{8}}, \quad (\text{Teor. 5.1})$$

Ahora bien, $45 = 3^2 \cdot 5$. Luego, aplicando la Conjetura de Urra se tiene,

$$5.5.2.- \quad 45 F(2^{24} - 1)$$

A partir de 5.5.2 se prueba que $45 F(2^{12} - 1)$.

De donde,

$$5.5.3.- \quad 1 + 45.91 = 2^{12}$$

Aplicando ahora el Teorema 3 se obtiene,

$$5.5.4.- \quad \Gamma\left(\frac{7}{45}\right) = \left(B_{12}\left(\frac{7}{45}\right) \prod_{i=0}^{i=636} \left(\frac{7}{45} + i\right) \right)^{\frac{1}{4095}}$$

Introduciendo en 5.5.1 el valor obtenido en 5.5.4., queda

$$5.5.5.- \quad \Gamma\left(\frac{7}{360}\right) = \left(B_3\left(\frac{7}{360}\right) \left(B_{12}\left(\frac{7}{45}\right) \prod_{i=0}^{i=636} \left(\frac{7}{45} + i\right) \right)^{\frac{1}{4095}} \right)^{\frac{1}{8}}$$

De 5.5.5 se obtiene la aproximación:

$$5.5.6.- \quad \Gamma\left(\frac{7}{360}\right) \approx 50.87025138219191542228419143096326401989997191652426(83\dots)$$

Referencias

- Urro, J. N., Saavedra, B. (2008), 'Función Gama, (Sobre la evaluación de la función gama)', Seminario: Tópicos para la investigación en Matemática, Departamento de Ciencias, Núcleo de Nueva Esparta, Universidad de Oriente, Venezuela. [Documento disponible en: www.contractil.com].
- Urro, J. N., Saavedra, B. (2009), 'Función Gama, (Sobre la evaluación de la función gama, Segunda Parte)', Seminario: Tópicos para la investigación en Matemática, Departamento de Ciencias, Núcleo de Nueva Esparta, Universidad de Oriente, Venezuela. [Documento disponible en: www.contractil.com].