

FUNCIÓN GAMA
(Sobre la evaluación de la Función Gama)

SEGUNDA PARTE

J. N. Urra – B. Saavedra

UNIVERSIDAD DE ORIENTE. VENEZUELA

Febrero - 2009

RESUMEN.-

Se proporcionan fórmulas para la evaluación de $\Gamma(x)$, siendo x en cada caso, un número racional tal que $0 < x < 1$.

Palabras Clave: Función Contráctil, Función Beta-n.

INTRODUCCIÓN.-

El contenido matemático de esta Monografía es la continuación de los temas desarrollados en una monografía anterior titulada: “Función Gama” (Sobre la evaluación de la Función Gama). J. N. Urra- B. Saavedra. Diciembre 2008.

En aquella monografía se observaron algunas imprecisiones en el planteamiento de los Objetivos Principales y en la Estructura Formal de su presentación.

Tales imprecisiones fueron señaladas en los importantes comentarios hechos por los Señores: Martín y Axel Vogt, a través del foro de Google: [//groups.google.com/group/sci.math.symbolic/](http://groups.google.com/group/sci.math.symbolic/). Enero 2009.

Los métodos propuestos para la evaluación de $\Gamma(x)$, siendo x un número racional tal que $0 < x < 1$, se fundamentan en la evaluación previa de la función Beta Central $B(x)$, $0 < x < 1$.

La exposición completa se ha distribuido en tres Apartados.

El primer Apartado está referido a la evaluación de la función Beta Central en términos de funciones contráctiles. Sin embargo, en los Apartados que siguen el texto se aleja del ámbito de las funciones contráctiles y de notaciones no-convencionales, tomando en cuenta las sugerencias contenidas en los comentarios de Martín y Vogt.

I.- Función Beta-Central.-

La función Beta Central $B(x)$, para argumento real $x > 0$, se define del siguiente modo:

1.- $B(x) = B(x, x)$

donde $B(x, x) = \text{Beta}(x, x)$

2.- Teorema.- Si $0 < x < 1$, entonces,

$$B(x) = \frac{2}{x} \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle \quad (1)$$

Demostración.-

$$\begin{aligned} 2-1.- \quad B(x) &= \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{2x}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{2x}} dt + \int_1^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{2x}} dt \end{aligned}$$

Ahora bien, si $0 < x < 1$, entonces,

$$2-2.- \quad \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{2x}} dt = \frac{1}{x} \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 2-3.- \quad \int_1^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{2x}} dt &= \frac{1}{x} \left\langle \frac{1}{x}, 2x \right\rangle \quad (1) \\ &= \frac{1}{x} \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle \quad (1) \end{aligned}$$

Introduciendo en 2-1 los resultados obtenidos en 2-2 y 2-3 se tiene,

$$2-4.- \quad B(x) = \frac{2}{x} \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle \quad (1) \quad , \quad 0 < x < 1$$

†

3.- Teorema.- Si $0 < x < 1$, entonces,

$$\left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1) = \frac{1}{4^x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_{2x}(x+1, k)}{2^x}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
 3-1.- \quad \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1) &= H_{\frac{1}{1-x}, 2x-1} (1) \quad , \quad 0 < x < 1 \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (1 \oplus 1)^{2x+k} 1^{(2x-1, k | \frac{1}{1-x})} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2x+k}} \tau_{2x} (2x+k, 1-x) \\
 &= \frac{1}{4^x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_{2x} (x+1, k)}{2^k}
 \end{aligned}$$

†

Observación.- El teorema 3 implica

$$3-2.- \quad \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1) = \frac{1}{4^x} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x(2x+1) \cdots (2x+k)}{2^{k+1} (x+1)(x+2) \cdots (x+1+k)} \right) \quad , \quad 0 < x < 1$$

La fórmula 3-2 induce la siguiente fórmula de aproximación para $\left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1)$, $0 < x < 1$.

$$3-3.- \quad \left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1) \approx \frac{1}{4^x} \left(1 + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2x(2x+1) \cdots (2x+k)}{2^{k+1} (x+1)(x+2) \cdots (x+1+k)} \right)$$

El error en la evaluación de $\left\langle \frac{1}{1-x}, 2x-1 \right\rangle (1)$, $0 < x < 1$, a través de la fórmula 3-3 es menor que $10^{-\frac{3n}{10}}$.

4.- Problema.- Evaluar $\left\langle \frac{1}{7}, \frac{5}{7} \right\rangle (1)$ con un error menor que 10^{-50} .

Solución.-

$$\begin{aligned}
 4-1.- \quad \left\langle \frac{1}{7}, \frac{5}{7} \right\rangle (1) &= \left\langle \frac{1}{1-\frac{6}{7}}, \frac{12}{7}-1 \right\rangle (1) \\
 &\approx \frac{1}{4^{\frac{6}{7}}} \left(1 + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\frac{12}{7} \cdot \frac{19}{7} \cdots \left(\frac{12}{7} + k \right)}{2^{k+1} \cdot \frac{13}{7} \cdot \frac{20}{7} \cdots \left(\frac{13}{7} + k \right)} \right) \quad (3-3) \\
 &= \frac{\sqrt[7]{4}}{4} \left(1 + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{12 \cdot 19 \cdots (12+7k)}{2^{k+1} \cdot 13 \cdot 20 \cdots (13+7k)} \right)
 \end{aligned}$$

Para un error menor que 10^{-50} , debe ser,

$$4-2.- \quad 10^{-\frac{3n}{10}} \leq 10^{-50}$$

$$\frac{3n}{10} \geq 50$$

$$n \geq \frac{500}{3}$$

Luego, bastará elegir $n \geq 167$.

De donde,

$$4-3.- \quad \left\langle_{7, \frac{5}{7}}^1 (1) = \frac{\sqrt[7]{4}}{4} \left(1 + \sum_{k=0}^{167} \frac{12 \cdot 19 \cdots (12+7k)}{2^{k+1} \cdot 13 \cdot 20 \cdots (13+7k)} \right) \right.$$

con un error menor que 10^{-50} .

Esto es,

$$4-4.- \quad \left\langle_{7, \frac{5}{7}}^1 (1) \approx 0.57495039355557091437170064976644937170252651069980$$

Comentario.- La función contráctil $\left\langle_{7, \frac{5}{7}}^1 (1) \right.$ admite la siguiente representación integral:

$$4-5.- \quad \left\langle_{7, \frac{5}{7}}^1 (1) = 6 \int_0^1 \frac{x^5}{(1+x^7)^{\frac{12}{7}}} dx$$

La igualdad 4-5 implica:

4-6.-

$$\int_0^1 \frac{x^5}{(1+x^7)^{\frac{12}{7}}} dx \approx 0.095825065592595152395283441627741561950421085116633$$

5.- Teorema.- Si $0 < x < 1$, entonces,

$$B(x) = \frac{2}{x \cdot 4^x} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x(2x+1) \cdots (2x+k)}{2^{k+1} \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdots (x+1+k)} \right)$$

Demostración.- El Teor. 5 es evidente, con arreglo al Teor. 2 y a la igualdad 3-2.

†

Ejemplos.-

$$5-1.- \quad B\left(\frac{3}{11}\right) = \frac{11 \sqrt[4]{32}}{3} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 17 \cdots (6+11k)}{2^{k+1} \cdot 14 \cdot 25 \cdots (14+11k)} \right)$$

$$5-2.- \quad B\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{4 \sqrt[4]{8}}{5} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 9 \cdots (5+4k)}{13 \cdot 21 \cdots (13+8k)} \right)$$

$$5-3.- \quad B\left(\frac{1}{6}\right) = 6 \sqrt[3]{4} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (1+3k)}{7 \cdot 13 \cdot 19 \cdots (7+6k)} \right)$$

6.- Teorema.- Para cada par de números reales positivos x, y ,

$$B(x+y) = B(x) \tau_x(2x, y) \tau_x(2x+y, y)$$

Demostración.- Es suficiente aplicar dos veces el Teorema de Factorización para la función beta. En efecto,

$$\begin{aligned} 6-1.- \quad B(x+y) &= B(x+y, x+y) \\ &= B(x+y, x) \tau_x(2x+y, y) \\ &= B(x, x) \tau_x(2x, y) \tau_x(2x+y, y) \\ &= B(x) \tau_x(2x, y) \tau_x(2x+y, y) \end{aligned}$$

†

7.- Teorema.- Para cada número entero positivo x ,

$$B(x) = \frac{((x-1)!)^2}{(2x-1)!}$$

Demostración.- La fórmula proporcionada en el Teor. 7 es una conocida fórmula en la teoría general de la función beta.

†

8.- Comentario.- Los Teoremas 5, 6 y 7 son suficientes para evaluar $B(x)$, $x > 0$.

Ejemplos.-

$$8-1.- \quad B\left(\frac{7}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}+3\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= B\left(\frac{1}{2}\right) \tau_{\frac{1}{2}}(1,3) \tau_{\frac{1}{2}}(4,3) \quad (\text{Teor.6}) \\
 &= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \\
 &\quad \frac{1.2.3}{4.5.6} \\
 &= \frac{5\pi}{1024}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8-2.- \quad B\left(\frac{21}{8}\right) &= B\left(\frac{5}{8}+2\right) \\
 &= B\left(\frac{5}{8}\right) \tau_{\frac{5}{8}}\left(\frac{5}{4}, 2\right) \tau_{\frac{5}{8}}\left(\frac{13}{4}, 2\right) \quad , \quad (\text{Teor.6}) \\
 &= B\left(\frac{5}{8}\right) \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{13}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{13}{8} \\
 &\quad \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{13}{4} \cdot \frac{17}{4} \\
 &= \frac{65}{2448} B\left(\frac{5}{8}\right) \\
 &= \frac{13^4 \sqrt{8}}{612} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5.9 \cdots (5+4k)}{13.21 \cdots (13+8k)} \right) \quad , \quad (5-2)
 \end{aligned}$$

Nota Importante: En adelante la evaluación de la función Beta Central se hará a través de los Teoremas 5, 6 y 7.

Esta es una manera de alejarse del ámbito de las funciones contráctiles y de notaciones no-convencionales.

II.- Las Funciones Beta-n, $n = 1, 2, \dots$

1.- Definición.- Para cada número entero positivo n , se define la función Beta-n, (B_n) , para argumento real positivo, del siguiente modo:

$$1-1.- B_n(x) = \prod_{i=1}^{i=n} (B(2^{n-i}x))^{2^{i-1}}, \quad x > 0$$

Nota: La familia de funciones Beta-n, $n = 1, 2, \dots$ ha sido introducida por J. N. Urra.

En los siguientes ejemplos se usará la notación alternativa $B^r(x)$ en lugar de $(B(x))^r$, $r = 1, 2, \dots$

$$1-2.- B_1(x) = B(x)$$

$$1-3.- B_2(x) = B(2x).B^2(x)$$

$$1-4.- B_3(x) = B(4x).B^2(2x).B^4(x)$$

En general,

$$1-5.- B_n(x) = B(2^{n-1}x).B^2(2^{n-2}x) \dots B^{2^{n-1}}(x)$$

2.- Ejemplos sobre evaluación numérica de $B_n(x)$

$$2-1.- B_2\left(\frac{1}{2}\right) = B(1).B^2\left(\frac{1}{2}\right) \\ = \pi^2$$

$$2-2.- B_3\left(\frac{1}{2}\right) = B(2).B^2(1).B^4\left(\frac{1}{2}\right) \\ = \frac{\pi^4}{6}$$

$$2-3.- B_3\left(\frac{3}{4}\right) = B(3).B^2\left(\frac{3}{2}\right).B^4\left(\frac{3}{4}\right) \\ = \frac{1}{30}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 B^4\left(\frac{3}{4}\right) \\ = \frac{1}{30}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 B^4\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{2430} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (3+2k)}{7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (7+4k)} \right)^4, \quad (\text{Teor. I-5})$$

$$\begin{aligned} 2-4.- \quad B_3(1) &= B(4) \cdot B^2(2) \cdot B^4(1) \\ &= \frac{1}{140} \left(\frac{1}{6} \right)^2 (1)^4 \\ &= \frac{1}{5040} \end{aligned}$$

3.- Teorema.- Ley de Recurrencia.- Para cada número real positivo x ,

$$B_{n+1}(x) = B(2^n x) (B_n(x))^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Demostración.-

$$3-1.- \quad B_{n+1}(x) = \prod_{i=1}^{i=n+1} (B(2^{n+1-i} x))^{2^{i-1}}$$

Cambiando índices $i = j+1$, se tiene,

$$\begin{aligned} 3-2.- \quad B_{n+1}(x) &= \prod_{j=0}^{j=n} (B(2^{n-j} x))^{2^j} \\ &= B(2^n x) \prod_{j=1}^{j=n} (B(2^{n-j} x))^{2^j} \\ &= B(2^n x) \left(\prod_{j=1}^{j=n} (B(2^{n-j} x))^{2^{j-1}} \right)^2 \\ &= B(2^n x) (B_n(x))^2 \\ &\quad \vdash \end{aligned}$$

4.- Teorema.- Sea x un número entero positivo. Entonces,

$$B_n(x) = \frac{((x-1)!)^{2^n}}{(2^n x - 1)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Demostración.- Inducción completa.

$$4-1.- \quad n = 1, \quad B_1(x) = B(x)$$

$$= \frac{((x-1)!)^2}{(2x-1)!}, \quad (\text{Teor. I-7})$$

4-2.- Hipótesis de Inducción.- Sea válido el Teorema para algún número entero positivo n.

4-3.- Para n+1 se tiene,

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) &= B(2^n x)(B_n(x))^2, && (\text{Teor. 3}) \\ &= \frac{((2^n x - 1)!)^2}{(2^{n+1} x - 1)!} \cdot \left(\frac{((x-1)!)^{2^n}}{(2^n x - 1)!} \right)^2, && (\text{Teor. I-7), (4-2)} \\ &= \frac{((x-1)!)^{2^{n+1}}}{(2^{n+1} x - 1)!} \\ &\quad \vdash \end{aligned}$$

Observación.- El Teor. 4 implica los siguientes resultados:

$$4-4.- B_n(1) = \frac{1}{(2^n - 1)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$4-5.- B_n(2) = \frac{1}{(2^{n+1} - 1)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

5.- Ejemplos.-

$$5-1.- B_5(4) = \frac{(3!)^{2^5}}{(2^5 \cdot 4 - 1)!} = \frac{6^{32}}{127!}$$

$$5-2.- B_9(1) = \frac{1}{(2^9 - 1)!} = \frac{1}{511!}$$

6.- Teorema.- Para cada número entero positivo n,

$$B_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^{2^n}}{(2^n - 1)!}$$

Demostración.- Inducción completa.

$$\begin{aligned}
 6-1.- \quad n=1, \quad B_2\left(\frac{1}{2}\right) &= B(1) B^2\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \pi^2 \\
 &= \frac{\pi^2}{2-1}
 \end{aligned}$$

6-2.- Hipótesis de Inducción.- Sea válido el Teorema para algún número entero positivo n.

6-3.- Para n + 1 se tiene,

$$\begin{aligned}
 B_{n+2}\left(\frac{1}{2}\right) &= B(2^n) \left(B_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2, \quad (\text{Teor. 3}) \\
 &= \frac{\left((2^n - 1)!\right)^2}{(2^{n+1} - 1)!} \cdot \left(\frac{\pi^{2^n}}{(2^n - 1)!} \right)^2, \quad (6-2) \\
 &= \frac{\pi^{2^{n+1}}}{(2^{n+1} - 1)!}
 \end{aligned}$$

┆

Ejemplos.-

$$6-4.- \quad B_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^{2^2}}{(2^2 - 1)!} = \frac{\pi^4}{6}$$

$$6-5.- \quad B_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^{2^4}}{(2^4 - 1)!} = \frac{\pi^{16}}{15!}$$

III.- Sobre la evaluación de la función gama

1.- Teorema.- Para cada número real positivo x y cada número entero positivo n ,

$$(\Gamma(x))^{2^n} = \Gamma(2^n x) \cdot B_n(x)$$

Demostración.- Inducción completa.

1-1.- Si $n = 1$, se tiene la conocida fórmula

$$(\Gamma(x))^2 = \Gamma(2x) \cdot B(x, x)$$

1-2.- Hipótesis de Inducción.- Sea válido el Teorema para algún número entero positivo n .

1-3.- Para $n + 1$ se tiene,

$$\begin{aligned} (\Gamma(x))^{2^{n+1}} &= \left((\Gamma(x))^{2^n} \right)^2 \\ &= \left(\Gamma(2^n x) \cdot B_n(x) \right)^2, & (1-2) \\ &= \left(\Gamma(2^n x) \right)^2 \cdot \left(B_n(x) \right)^2 \\ &= \Gamma(2^{n+1} x) \cdot B(2^n x) \cdot \left(B_n(x) \right)^2 \\ &= \Gamma(2^{n+1} x) \cdot B_{n+1}(x), & (\text{Teor. II-3}) \end{aligned}$$

†

Nota.- La fórmula proporcionada en el Teor. 1 es una “Fórmula de Potenciación” para la función gama.

Es claro que se trata de una potenciación restringida a exponentes de la forma 2^n , $n = 1, 2, \dots$

2.- Proposición.- Para cada número real positivo x y cada número entero positivo n ,

$$\Gamma\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left(\Gamma(x) \cdot B_n\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}}$$

Demostración.- Aplicando la fórmula de potenciación se tiene,

$$2-1.- \left(\Gamma\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{2^n} = \Gamma(x) \cdot B_n\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

De donde,

$$2-2.- \Gamma\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left(\Gamma(x) \cdot B_n\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}}$$

Observación.- Si x es un número entero positivo, la Prop. 2 se reduce a la fórmula siguiente:

$$2-3.- \Gamma\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left((x-1)! \cdot B_n\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}}$$

Es necesario percatarse de inmediato de la importancia de la Proposición 2 y particularmente, de la fórmula 2-3.

Los ejemplos siguientes son aplicaciones de la fórmula 2-3,

$$2-4.- \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(B_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2-3)$$

$$= \left(B\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}}$$

$$2-5.- \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \left(B_2\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2-3)$$

$$= \left(B\left(\frac{1}{2}\right) \cdot B^2\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left(32\pi \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1.3.5 \cdots (1+2k)}{5.9.13 \cdots (5+4k)}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= 2 \left(\sqrt{2\pi} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (1+2k)}{5.9.13 \dots (5+4k)} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} 2-6.- \quad \Gamma\left(\frac{3}{8}\right) &= \left(2! B_3\left(\frac{3}{8}\right) \right)^{\frac{1}{8}} \\ &= \left(2 B_3\left(\frac{3}{8}\right) \right)^{\frac{1}{8}} \\ &= \left(2B\left(\frac{3}{2}\right) \cdot B^2\left(\frac{3}{4}\right) \cdot B^4\left(\frac{3}{8}\right) \right)^{\frac{1}{8}} \\ &= \left(\frac{\pi}{4} \cdot B^2\left(\frac{3}{4}\right) \cdot B^4\left(\frac{3}{8}\right) \right)^{\frac{1}{8}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot B\left(\frac{3}{4}\right) \cdot B^2\left(\frac{3}{8}\right) \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

3.- Proposición.- Sea q un número entero. Si existe un número entero positivo n tal que $q = 2^n - 1$, entonces,

$$\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) = \left(\frac{1}{q} \cdot B_n\left(\frac{1}{q}\right) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Demostración.- Si $q = 2^n - 1$, siendo n un número entero positivo, entonces,

$$\begin{aligned} 3-1.- \quad \left(\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \right)^{2^n} &= \Gamma\left(\frac{2^n}{q}\right) \cdot B_n\left(\frac{1}{q}\right) \quad , \quad (\text{Teor. 1}) \\ &= \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right) \cdot B_n\left(\frac{1}{q}\right) \\ &= \frac{1}{q} \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \cdot B_n\left(\frac{1}{q}\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$3-2.- \quad \left(\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \right)^{2^n - 1} = \frac{1}{q} B_n\left(\frac{1}{q}\right)$$

Esto es,

$$3-3.- \left(\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \right)^q = \frac{1}{q} B_n\left(\frac{1}{q}\right)$$

De donde,

$$3-4.- \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) = \left(\frac{1}{q} B_n\left(\frac{1}{q}\right) \right)^{\frac{1}{q}}$$

†

Ejemplos de aplicación de la Prop. 3.

$$3-5.- \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} B_2\left(\frac{1}{3}\right) \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$3-6.- \Gamma\left(\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{1}{7} B_3\left(\frac{1}{7}\right) \right)^{\frac{1}{7}}$$

$$3-7.- \Gamma\left(\frac{1}{15}\right) = \left(\frac{1}{15} B_4\left(\frac{1}{15}\right) \right)^{\frac{1}{15}}$$

4.- Comentario.- La fórmula de potenciación proporcionada en el Teor. 1,

$$4-1.- \left(\Gamma(x) \right)^{2^n} = \Gamma(2^n x) \cdot B_n(x) \quad , \quad x > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

puede ser utilizada para determinar el valor de $\Gamma(x)$ cuando se conoce el valor de $\Gamma(2^n x)$. En tal caso se tiene,

$$4-2.- \Gamma(x) = \left(\Gamma(2^n x) \cdot B_n(x) \right)^{\frac{1}{2^n}} \quad , \quad x > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

En los ejemplos que siguen se combina la fórmula 4-2 con las fórmulas proporcionadas en las Proposiciones 2 y 3.

$$\begin{aligned} 4-3.- \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \cdot B_1\left(\frac{2}{3}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot B_1\left(\frac{2}{3}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \mathbf{B}\left(\frac{2}{3}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \mathbf{B}_2\left(\frac{1}{3}\right) \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{B}\left(\frac{2}{3}\right) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3-5) \\
 &= \left(\frac{1}{81} \cdot \mathbf{B}_2\left(\frac{1}{3}\right) \left(\mathbf{B}\left(\frac{2}{3}\right) \right)^3 \right)^{\frac{1}{6}} \\
 &= \left(\frac{1}{81} \cdot \mathbf{B}\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\mathbf{B}\left(\frac{1}{3}\right) \right)^2 \left(\mathbf{B}\left(\frac{2}{3}\right) \right)^3 \right)^{\frac{1}{6}} \\
 &= \left(\frac{1}{9} \mathbf{B}\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\mathbf{B}\left(\frac{2}{3}\right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4-4.- \quad \Gamma\left(\frac{4}{7}\right) &= \left(\left(\Gamma\left(\frac{4}{7}\right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\Gamma\left(\frac{8}{7}\right) \cdot \mathbf{B}_1\left(\frac{4}{7}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{1}{7} \Gamma\left(\frac{1}{7}\right) \cdot \mathbf{B}\left(\frac{4}{7}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \mathbf{B}_3\left(\frac{1}{7}\right) \right)^{\frac{1}{7}} \cdot \mathbf{B}\left(\frac{4}{7}\right) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3-6) \\
 &= \left(\frac{1}{7^8} \cdot \mathbf{B}_3\left(\frac{1}{7}\right) \left(\mathbf{B}\left(\frac{4}{7}\right) \right)^7 \right)^{\frac{1}{14}} \\
 &= \left(\frac{1}{7^8} \cdot \mathbf{B}\left(\frac{4}{7}\right) \cdot \left(\mathbf{B}\left(\frac{2}{7}\right) \right)^2 \cdot \left(\mathbf{B}\left(\frac{1}{7}\right) \right)^4 \cdot \left(\mathbf{B}\left(\frac{4}{7}\right) \right)^7 \right)^{\frac{1}{14}} \\
 &= \left(\frac{1}{7^4} \cdot \left(\mathbf{B}\left(\frac{1}{7}\right) \right)^2 \cdot \mathbf{B}\left(\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\mathbf{B}\left(\frac{4}{7}\right) \right)^4 \cdot \right)^{\frac{1}{7}}
 \end{aligned}$$

$$4-5.- \quad \Gamma\left(\frac{7}{24}\right) = \left(\left(\Gamma\left(\frac{7}{24}\right) \right)^{2^3} \right)^{\frac{1}{8}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \cdot B_3\left(\frac{7}{24}\right) \right)^{\frac{1}{8}} \\
 &= \left(\frac{4}{9} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot B_3\left(\frac{7}{24}\right) \right)^{\frac{1}{8}} \\
 &= \left(\frac{4}{9} \left(\frac{1}{3} B_2\left(\frac{1}{3}\right) \right)^{\frac{1}{3}} \cdot B_3\left(\frac{7}{24}\right) \right)^{\frac{1}{8}} \\
 &= \left(\frac{64}{2187} \cdot B_2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(B_3\left(\frac{7}{24}\right) \right)^3 \right)^{\frac{1}{24}}
 \end{aligned}$$

5.- Proposición.- Para cada número real $q > 0$,

$$\Gamma\left(\frac{q+1}{2q}\right) = \left(\frac{1}{q} \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \cdot B\left(\frac{q+1}{2q}\right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
 5-1.- \quad \Gamma\left(\frac{q+1}{2q}\right) &= \left(\left(\Gamma\left(\frac{q+1}{2q}\right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\Gamma\left(\frac{q+1}{q}\right) \cdot B_1\left(\frac{q+1}{2q}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{1}{q} \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \cdot B\left(\frac{q+1}{2q}\right) \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

†

Ejemplos de aplicación de la Prop. 5.

$$\begin{aligned}
 5-2.- \quad \Gamma\left(\frac{5}{8}\right) &= \Gamma\left(\frac{4+1}{2 \cdot 4}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot B\left(\frac{5}{8}\right) \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{(Prop.5)} \\
 &= \frac{1}{2} \left(B_2\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(B\left(\frac{5}{8}\right) \right)^4 \right)^{\frac{1}{8}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\pi} B\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(B\left(\frac{5}{8}\right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5-3.- \quad \Gamma\left(\frac{9}{16}\right) &= \Gamma\left(\frac{8+1}{2.8}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right).B\left(\frac{9}{16}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{(Prop.5)} \\
 &= \left(\frac{1}{8}\left(B_3\left(\frac{1}{8}\right)\right)^{\frac{1}{8}} B\left(\frac{9}{16}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{(2-3)} \\
 &= \left(\frac{1}{2^{24}}B_3\left(\frac{1}{8}\right).B^8\left(\frac{9}{16}\right)\right)^{\frac{1}{16}}
 \end{aligned}$$

Comentario.- También puede determinarse el valor de $\Gamma\left(\frac{9}{16}\right)$ mediante la aplicación directa de la Prop. 2. En tal caso se tiene,

$$\begin{aligned}
 5-4.- \quad \Gamma\left(\frac{9}{16}\right) &= \Gamma\left(\frac{9}{2^4}\right) \\
 &= \left(\Gamma(9).B_4\left(\frac{9}{16}\right)\right)^{\frac{1}{16}}, & \text{(Prop.2)} \\
 &= \left(8!B_4\left(\frac{9}{16}\right)\right)^{\frac{1}{16}}
 \end{aligned}$$

Nota: Es claro que los resultados 5-3 y 5-4 son concordantes. En efecto,

$$\begin{aligned}
 5-5.- \quad 8!B_4\left(\frac{9}{16}\right) &= 8!B\left(\frac{9}{2}\right)B^2\left(\frac{9}{4}\right)B^4\left(\frac{9}{8}\right)B^8\left(\frac{9}{16}\right), & \text{(II.1-5)} \\
 &= 8!\left(\frac{35}{2^{15}}B\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{5}{212^4}B\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2\left(\frac{1}{52^2}B\left(\frac{1}{8}\right)\right)^4 B^8\left(\frac{9}{16}\right), \\
 &= \frac{1}{2^{24}}B\left(\frac{1}{2}\right)B^2\left(\frac{1}{4}\right)B^4\left(\frac{1}{8}\right)B^8\left(\frac{9}{16}\right) \\
 &= \frac{1}{2^{24}}B_3\left(\frac{1}{8}\right)B^8\left(\frac{9}{16}\right)
 \end{aligned}$$

6.- Teorema.- Sean q, n, x números enteros positivos tales que, $q = 2^n - 1$, $0 < x < q$, entonces,

$$\Gamma\left(\frac{x}{q}\right) = \left(B_n\left(\frac{x}{q}\right) \prod_{i=0}^{i=x-1} \left(\frac{x}{q} + i\right) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned} 6-1.- \quad \left(\Gamma\left(\frac{x}{q}\right) \right)^{2^n} &= \Gamma\left(\frac{2^n x}{q}\right) \cdot B_n\left(\frac{x}{q}\right) \quad , \quad (\text{Teor. 1}) \\ &= \Gamma\left(\frac{2^n x - x + x}{q}\right) \cdot B_n\left(\frac{x}{q}\right) \\ &= \Gamma\left(\frac{x(2^n - 1) + x}{q}\right) \cdot B_n\left(\frac{x}{q}\right) \\ &= B_n\left(\frac{x}{q}\right) \Gamma\left(\frac{xq + x}{q}\right) \\ &= B_n\left(\frac{x}{q}\right) \Gamma\left(x + \frac{x}{q}\right) \\ &= B_n\left(\frac{x}{q}\right) \Gamma\left(\frac{x}{q}\right) \prod_{i=0}^{i=x-1} \left(\frac{x}{q} + i\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$6-2.- \quad \left(\Gamma\left(\frac{x}{q}\right) \right)^q = B_n\left(\frac{x}{q}\right) \cdot \prod_{i=0}^{i=x-1} \left(\frac{x}{q} + i\right)$$

De donde,

$$6-3.- \quad \Gamma\left(\frac{x}{q}\right) = \left(B_n\left(\frac{x}{q}\right) \prod_{i=0}^{i=x-1} \left(\frac{x}{q} + i\right) \right)^{\frac{1}{q}}$$

†

7.- Comentario.- Si $q = 2^n - 1$ para algún número entero positivo n , entonces puede aplicarse el Teor. 6 para evaluar $\Gamma\left(\frac{x}{q}\right)$, para cada número entero x , tal que $0 < x < q$.

Los siguientes ejemplos son aplicaciones del Teor. 6.

7-1.- $15 = 2^4 - 1$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{2}{15}\right) &= \left(B_4\left(\frac{2}{15}\right) \cdot \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{2}{15} + 1\right) \right)^{\frac{1}{15}} \\ &= \left(\frac{34}{225} B_4\left(\frac{2}{15}\right) \right)^{\frac{1}{15}}\end{aligned}$$

7-2.- $7 = 2^3 - 1$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{7}\right) &= \left(B_3\left(\frac{3}{7}\right) \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{7} + 1\right) \cdot \left(\frac{3}{7} + 2\right) \right)^{\frac{1}{7}} \\ &= \left(\frac{510}{343} B_3\left(\frac{3}{7}\right) \right)^{\frac{1}{7}}\end{aligned}$$

El Teor. 6 tiene todavía mayor alcance, obsérvese los siguientes ejemplos:

7-3.- $\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{15}\right)$

$$\begin{aligned}&= \left(B_4\left(\frac{3}{15}\right) \cdot \frac{3}{15} \cdot \left(\frac{3}{15} + 1\right) \cdot \left(\frac{3}{15} + 2\right) \right)^{\frac{1}{15}}, && \text{(Teor. 6)} \\ &= \left(B_4\left(\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{5} + 2\right) \right)^{\frac{1}{15}} \\ &= \left(\frac{66}{125} B_4\left(\frac{1}{5}\right) \right)^{\frac{1}{15}}\end{aligned}$$

7-4.- $\Gamma\left(\frac{1}{9}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{63}\right)$

$$\begin{aligned}&= \left(B_6\left(\frac{1}{9}\right) \cdot \prod_{i=0}^{i=6} \left(\frac{1}{9} + i\right) \right)^{\frac{1}{63}}, && \text{(Teor. 6)} \\ &= \left(B_6\left(\frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{19}{9} \cdot \frac{28}{9} \cdot \frac{37}{9} \cdot \frac{46}{9} \cdot \frac{55}{9} \right)^{\frac{1}{63}}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{498\,005\,200}{9^7} \cdot B_6 \left(\frac{1}{9} \right) \right)^{\frac{1}{63}}$$

8.- Teorema.- Si q, x son números enteros tales que q es impar y además $0 < x < q$, entonces existen dos números enteros n, y que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $0 < y < q$

b)
$$\left(\Gamma \left(\frac{x}{q} \right) \right)^{2^n} = \frac{y}{q} \Gamma \left(\frac{y}{q} \right) B_n \left(\frac{x}{q} \right)$$

Demostración.-

8-1.- Sea $n = \min \{ k \in \mathbb{N} / 2^k x > q \}$

De 8-1 se deduce,

8-2.- $2^n x = q + y$, $0 < y < q$

Por otra parte, aplicando la fórmula de potenciación para la función gama se tiene,

8-3.-
$$\begin{aligned} \left(\Gamma \left(\frac{x}{q} \right) \right)^{2^n} &= \Gamma \left(\frac{2^n x}{q} \right) B_n \left(\frac{x}{q} \right) \\ &= \Gamma \left(\frac{q+y}{q} \right) B_n \left(\frac{x}{q} \right) , & (8-2) \\ &= \Gamma \left(1 + \frac{y}{q} \right) B_n \left(\frac{x}{q} \right) \end{aligned}$$

De donde,

8-4.-
$$\left(\Gamma \left(\frac{x}{q} \right) \right)^{2^n} = \frac{y}{q} \Gamma \left(\frac{y}{q} \right) B_n \left(\frac{x}{q} \right)$$
 †

9.- Comentario.- La fórmula 8-4 constituye una vía para determinar el valor de $\Gamma \left(\frac{x}{q} \right)$, con arreglo al Teor. 8.

Distinguiremos tres casos.

9-1.- Primer caso: Se conoce el valor de $\Gamma\left(\frac{y}{q}\right)$. En este caso se tiene,

$$\Gamma\left(\frac{x}{q}\right) = \left(\frac{y}{q} \Gamma\left(\frac{y}{q}\right) \cdot B_n\left(\frac{x}{q}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}}$$

9-2.- Segundo caso: $y = x$. En este caso la fórmula 8-4 toma la forma siguiente,

$$\left(\Gamma\left(\frac{x}{q}\right)\right)^{2^n} = \frac{x}{q} \Gamma\left(\frac{x}{q}\right) B_n\left(\frac{x}{q}\right)$$

De donde,

$$\Gamma\left(\frac{x}{q}\right) = \left(\frac{x}{q} B_n\left(\frac{x}{q}\right)\right)^{\frac{1}{2^n-1}}$$

9-3.- Tercer caso: $y \neq x$ y no se conoce el valor de $\Gamma\left(\frac{y}{q}\right)$. En este caso puede aplicarse

nuevamente el Teor. 8 para evaluar ahora $\Gamma\left(\frac{y}{q}\right)$. Existen entonces dos números enteros

m, z tales que,

$$\left(\Gamma\left(\frac{y}{q}\right)\right)^{2^m} = \frac{z}{q} \Gamma\left(\frac{z}{q}\right) B_m\left(\frac{y}{q}\right) \quad , \quad 0 < z < q \quad , \quad (\text{Teor. 8})$$

Si la fórmula obtenida en 9-3 permite determinar el valor de $\Gamma\left(\frac{y}{q}\right)$, entonces se aplica 9-1 para obtener el valor de $\Gamma\left(\frac{x}{q}\right)$.

De otra manera, si $z = x$, entonces la fórmula 9-3 queda,

$$9-4.- \quad \left(\Gamma\left(\frac{y}{q}\right)\right)^{2^m} = \frac{x}{q} \Gamma\left(\frac{x}{q}\right) B_m\left(\frac{y}{q}\right)$$

combinando ahora 9-4 con 8-4 se obtiene,

$$9-5.- \quad \left(\Gamma\left(\frac{x}{q}\right)\right)^{2^{n+m}} = \frac{x}{q} \Gamma\left(\frac{x}{q}\right) B_m\left(\frac{y}{q}\right) \left(\frac{y}{q} B_n\left(\frac{x}{q}\right)\right)^{2^m}$$

De 9-5 se deduce una fórmula para evaluar $\Gamma\left(\frac{x}{q}\right)$.

$$9-6.- \quad \Gamma\left(\frac{x}{q}\right) = \left(\frac{x}{q} B_m\left(\frac{y}{q}\right) \left(\frac{y}{q} B_n\left(\frac{x}{q}\right) \right)^{2^m} \right)^{\frac{1}{2^{n+m}-1}}$$

Si $z \neq x$, se repite el procedimiento para evaluar en esta ocasión $\Gamma\left(\frac{z}{q}\right)$, en forma análoga al procedimiento seguido para evaluar $\Gamma\left(\frac{y}{q}\right)$ y seguidamente $\Gamma\left(\frac{x}{q}\right)$.

Después de un número α de aplicaciones del Teor. 8, siguiendo en cada caso el método sugerido en el Comentario 9, se obtendrá una fórmula para evaluar $\Gamma\left(\frac{x}{q}\right)$. Obviamente, $\alpha \leq q-1$.

10.- Problema.- Determinar una fórmula para evaluar $\Gamma\left(\frac{3}{17}\right)$, en términos de funciones Beta-n.

Solución.- En la solución del Prob. 10 se aplicará el Teor. 8 y se seguirá el procedimiento indicado en el comentario 9.

$$10-1.- \quad 2^3 \cdot 3 = 17 + 7$$

Luego,

$$\left(\Gamma\left(\frac{3}{17}\right) \right)^{2^3} = \frac{7}{17} \Gamma\left(\frac{7}{17}\right) B_3\left(\frac{3}{17}\right) \quad , \quad (\text{Teor. 8})$$

$$10-2.- \quad 2^2 \cdot 7 = 17 + 11$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{7}{17}\right) \right)^{2^2} = \frac{11}{17} \Gamma\left(\frac{11}{17}\right) B_2\left(\frac{7}{17}\right) \quad , \quad (\text{Teor. 8})$$

$$10-3.- \quad 2 \cdot 11 = 17 + 5$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{11}{17}\right) \right)^2 = \frac{5}{17} \Gamma\left(\frac{5}{17}\right) B_1\left(\frac{11}{17}\right) \quad , \quad (\text{Teor. 8})$$

10-4.- $2^2 \cdot 5 = 17 + 3$

$$\left(\Gamma\left(\frac{5}{17}\right) \right)^{2^2} = \frac{3}{17} \Gamma\left(\frac{3}{17}\right) \mathbf{B}_2\left(\frac{5}{17}\right) \quad , \quad (\text{Teor. 8})$$

La aparición de $\Gamma\left(\frac{3}{17}\right)$ en el segundo miembro de la igualdad 10-4 indica que las aplicaciones del Teor. 8 terminan aquí.

Ahora es necesario combinar las igualdades 10-4 y 10-1. Para ello se sigue una rutina que involucra 10-2 y 10-3.

10-5.- De 10-3 se tiene,

$$\begin{aligned} \left(\Gamma\left(\frac{11}{17}\right) \right)^8 &= \left(\frac{5}{17}\right)^4 \left(\Gamma\left(\frac{5}{17}\right) \right)^4 \left(\mathbf{B}_1\left(\frac{11}{17}\right) \right)^4 \\ &= \left(\frac{5}{17}\right)^4 \frac{3}{17} \Gamma\left(\frac{3}{17}\right) \mathbf{B}_2\left(\frac{5}{17}\right) \left(\mathbf{B}_1\left(\frac{11}{17}\right) \right)^4 \quad , \quad (10-4) \end{aligned}$$

10-6.- De 10-2 se tiene,

$$\begin{aligned} \left(\Gamma\left(\frac{7}{17}\right) \right)^{32} &= \left(\frac{11}{17}\right)^8 \left(\Gamma\left(\frac{11}{17}\right) \right)^8 \left(\mathbf{B}_2\left(\frac{7}{17}\right) \right)^8 \\ &= \left(\frac{11}{17}\right)^8 \left(\frac{5}{17}\right)^4 \frac{3}{17} \Gamma\left(\frac{3}{17}\right) \mathbf{B}_2\left(\frac{5}{17}\right) \left(\mathbf{B}_1\left(\frac{11}{17}\right) \right)^4 \left(\mathbf{B}_2\left(\frac{7}{17}\right) \right)^8 \quad , \quad (10-5) \end{aligned}$$

10-7.- De 10-1 se tiene,

$$\begin{aligned} \left(\Gamma\left(\frac{3}{17}\right) \right)^{256} &= \left(\frac{7}{17}\right)^{32} \left(\Gamma\left(\frac{7}{17}\right) \right)^{32} \left(\mathbf{B}_3\left(\frac{3}{17}\right) \right)^{32} \\ &= \left(\frac{7}{17}\right)^{32} \left(\frac{11}{17}\right)^8 \left(\frac{5}{17}\right)^4 \frac{3}{17} \Gamma\left(\frac{3}{17}\right) \mathbf{B}_2\left(\frac{5}{17}\right) \left(\mathbf{B}_1\left(\frac{11}{17}\right) \right)^4 \left(\mathbf{B}_2\left(\frac{7}{17}\right) \right)^8 \left(\mathbf{B}_3\left(\frac{3}{17}\right) \right)^{32} \quad , \quad (10-6) \end{aligned}$$

De donde,

$$10-8.- \Gamma\left(\frac{3}{17}\right) = \left(\left(\frac{7}{17}\right)^{32} \left(\frac{11}{17}\right)^8 \left(\frac{5}{17}\right)^4 \frac{3}{17} B_2\left(\frac{5}{17}\right) \left(B_1\left(\frac{11}{17}\right)\right)^4 \left(B_2\left(\frac{7}{17}\right)\right)^8 \left(B_3\left(\frac{3}{17}\right)\right)^{32} \right)^{\frac{1}{255}}$$

La siguiente aproximación para $\Gamma\left(\frac{3}{17}\right)$ se obtuvo de 10-8:

$$\Gamma\left(\frac{3}{17}\right) \approx 5.2403169661914775319619781595954427283393724612994$$

Observación.- La aplicación del Teor. 8 y el método sugerido en el Comentario 9 no es la única vía para resolver el Prob. 10.

En efecto, el Teor. 6 abre otra posibilidad.

$$\begin{aligned} 10-10.- \quad \Gamma\left(\frac{3}{17}\right) &= \Gamma\left(\frac{45}{255}\right) \\ &= \left(B_8\left(\frac{45}{255}\right) \prod_{i=0}^{i=44} \left(\frac{45}{255} + i\right) \right)^{\frac{1}{255}}, & \text{(Teor. 6)} \\ &= \left(B_8\left(\frac{3}{17}\right) \prod_{i=0}^{i=44} \left(\frac{3}{17} + i\right) \right)^{\frac{1}{255}} \end{aligned}$$

Nota: Es claro que los resultados 10-8 y 10-10 deben ser concordantes. La prueba de la concordancia entre 10-8 y 10-10 sigue una rutina análoga a aquella que se siguió para probar la concordancia entre las fórmulas 5-3 y 5-4.

La siguiente aproximación para $\Gamma\left(\frac{3}{17}\right)$ se obtuvo de 10-10.

$$\Gamma\left(\frac{3}{17}\right) \approx 5.2403169661914775319619781595954427283393724612994$$

11.- Comentario.- Existen todavía otras vías para evaluar $\Gamma\left(\frac{3}{17}\right)$.

En el siguiente procedimiento se combina la fórmula de potenciación con el Teorema de la Reflexión.

$$\begin{aligned} 11-1.- \quad \left(\Gamma\left(\frac{3}{17}\right) \right)^{2^4} &= \Gamma\left(\frac{48}{17}\right) \cdot B_4\left(\frac{3}{17}\right) \\ &= \Gamma\left(2 + \frac{14}{17}\right) \cdot B_4\left(\frac{3}{17}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{434}{289} \Gamma\left(\frac{14}{17}\right) \cdot B_4\left(\frac{3}{17}\right)$$

luego,

$$11-2.- \left(\Gamma\left(\frac{3}{17}\right)\right)^{17} = \frac{434}{289} \Gamma\left(\frac{3}{17}\right) \Gamma\left(\frac{14}{17}\right) \cdot B_4\left(\frac{3}{17}\right)$$

De donde,

$$11-3.- \Gamma\left(\frac{3}{17}\right) = \left(\frac{434\pi}{289} \text{Csc}\left(\frac{3\pi}{17}\right) B_4\left(\frac{3}{17}\right)\right)^{\frac{1}{17}}$$

Nota Importante: A partir de la igualdad 11-2 puede seguirse los métodos del Cálculo Contractivo y eludir así trasladar el problema de la evaluación de $\Gamma\left(\frac{3}{17}\right)$ al problema de la evaluación previa de $\text{Csc}\left(\frac{3\pi}{17}\right)$ como indica la fórmula 11-3.

De 11-2 se tiene entonces,

$$11-4.- \left(\Gamma\left(\frac{3}{17}\right)\right)^{17} = \frac{434}{289} \beta\left(\frac{3}{17}, \frac{14}{17}\right) \cdot B_4\left(\frac{3}{17}\right)$$

$$= \frac{434}{289} \left(\frac{17}{3} \left\langle \frac{17}{3} \right\rangle (1) + \frac{17}{14} \left\langle \frac{17}{14} \right\rangle (1)\right) B_4\left(\frac{3}{17}\right)$$

De donde,

$$11-5.- \Gamma\left(\frac{3}{17}\right) = \left(\frac{434}{17} \left(\frac{1}{3} \left\langle \frac{17}{3} \right\rangle (1) + \frac{1}{14} \left\langle \frac{17}{14} \right\rangle (1)\right) B_4\left(\frac{3}{17}\right)\right)^{\frac{1}{17}}$$

El procedimiento sugerido en el Comentario 11 se fundamenta en los dos Teoremas siguientes:

12.- Teorema.- Si q, n son números enteros positivos tales que $q = 2^n + 1$, entonces,

$$\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) = \left(\pi \text{Csc}\left(\frac{\pi}{q}\right) B_n\left(\frac{1}{q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

Demostración.- Aplicando el Teorema de la potenciación se tiene,

$$\begin{aligned}
 12-1.- \left(\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \right)^{2^n} &= \Gamma\left(\frac{2^n}{q}\right) B_n\left(\frac{1}{q}\right) \\
 &= \Gamma\left(\frac{q-1}{q}\right) B_n\left(\frac{1}{q}\right) \\
 &= \Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right) B_n\left(\frac{1}{q}\right)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 12-2.- \left(\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \right)^{2^n+1} &= \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right) B_n\left(\frac{1}{q}\right) \\
 &= \pi \operatorname{Csc}\left(\frac{\pi}{q}\right) B_n\left(\frac{1}{q}\right)
 \end{aligned}$$

De donde,

$$12-3.- \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) = \left(\pi \operatorname{Csc}\left(\frac{\pi}{q}\right) B_n\left(\frac{1}{q}\right) \right)^{\frac{1}{q}}$$

†

13.- Teorema.- Sean q, n, x números enteros positivos tales que $q = 2^n + 1, 1 < x < q$, entonces,

$$\Gamma\left(\frac{x}{q}\right) = \left(\pi \operatorname{Csc}\left(\frac{\pi x}{q}\right) B_n\left(\frac{1}{q}\right) \prod_{i=0}^{i=x-2} \left(1+i-\frac{x}{q}\right) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
 13-1.- \left(\Gamma\left(\frac{x}{q}\right) \right)^{2^n} &= \Gamma\left(\frac{2^n x}{q}\right) B_n\left(\frac{x}{q}\right) \\
 &= \Gamma\left(\frac{qx-x}{q}\right) B_n\left(\frac{x}{q}\right) \\
 &= \Gamma\left(x-\frac{x}{q}\right) B_n\left(\frac{x}{q}\right) \\
 &= \Gamma\left(x-1+\left(1-\frac{x}{q}\right)\right) B_n\left(\frac{x}{q}\right) \\
 &= \Gamma\left(1-\frac{x}{q}\right) \left(\prod_{i=0}^{i=x-2} \left(1+i-\frac{x}{q}\right) \right) B_n\left(\frac{x}{q}\right)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 13-2.- \left(\Gamma\left(\frac{x}{q}\right) \right)^{2^n+1} &= \Gamma\left(\frac{x}{q}\right) \Gamma\left(1-\frac{x}{q}\right) B_n\left(\frac{x}{q}\right) \prod_{i=0}^{i=x-2} \left(1+i-\frac{x}{q}\right) \\
 &= \pi \operatorname{Csc}\left(\frac{\pi x}{q}\right) B_n\left(\frac{x}{q}\right) \prod_{i=0}^{i=x-2} \left(1+i-\frac{x}{q}\right)
 \end{aligned}$$

De donde,

$$13-3.- \Gamma\left(\frac{x}{q}\right) = \left(\pi \operatorname{Csc}\left(\frac{\pi x}{q}\right) B_n\left(\frac{x}{q}\right) \prod_{i=0}^{i=x-2} \left(1+i-\frac{x}{q}\right) \right)^{\frac{1}{q}}$$

†

14.-Nota: Los Teoremas 12 y 13 pueden aplicarse en un contexto más amplio que aquel que sugieren sus enunciados.

Obsérvese en detalle el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}
 14-1.- \Gamma\left(\frac{1}{13}\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{65}\right) \\
 &= \left(\pi \operatorname{Csc}\left(\frac{5\pi}{65}\right) B_6\left(\frac{5}{65}\right) \prod_{i=0}^{i=3} \left(1+i-\frac{5}{65}\right) \right)^{\frac{1}{65}}, & \text{(Teor.13)} \\
 &= \left(\pi \operatorname{Csc}\left(\frac{\pi}{13}\right) B_6\left(\frac{1}{13}\right) \prod_{i=0}^{i=3} \left(1+i-\frac{1}{13}\right) \right)^{\frac{1}{65}} \\
 &= \left(\frac{581400\pi}{28561} \operatorname{Csc}\left(\frac{\pi}{13}\right) B_6\left(\frac{1}{13}\right) \right)^{\frac{1}{65}}
 \end{aligned}$$

De 14-1 se obtiene la aproximación,

$$14-2.- \Gamma\left(\frac{1}{13}\right) \approx 12.493910817096539543549904270767244172643783242216$$