FUNCIÓN GAMA

(Sobre la evaluación de la Función Gama)

J. N. Urra – B. Saavedra

UNIVERSIDAD DE ORIENTE. VENEZUELA

Diciembre 30 - 2008

RESUMEN.-

A partir de una sencilla fórmula de duplicación, se aplican las funciones contráctiles a la evaluación de $\Gamma(x)$, cuando x es un número racional positivo.

Palabras Clave: Función Contráctil, Función Tau-beta, Número Sigma.

INTRODUCCIÓN.-

El contenido matemático de esta monografía es una ampliación de unas notas preparadas como tema de discusión en un seminario sobre “Tópicos para la Investigación en Matemáticas” dirigido a los profesores de Matemática del Núcleo de Nueva Esparta de la Universidad de Oriente. El seminario formaba parte de los eventos que se realizaron en conmemoración del Aniversario Nº 50 de la fundación de la Universidad.

Para entrar en la materia del Seminario, se presenta un primer apartado a modo de “Preámbulos” que contiene algunos conceptos tomados de la teoría de las funciones contráctiles, que son utilizados posteriormente, en la obtención de fórmulas para la evaluación de la función gama.

En el segundo apartado se muestran métodos para la evaluación de la función beta. Los resultados obtenidos se aplican más adelante, a la generación de series numéricas que en cada caso, hacen posible la evaluación de $\Gamma(x)$ para valores racionales de x.

I.- PREÁMBULOS

1.- Primera Contracción.- Sea x un número real no negativo. Por Primera Contracción de x se entiende:

$$1 \oplus x = x(1+x)^{-1}$$

1-1.- Observación: Si $0 \leq \alpha < 1$, entonces existe un número real x tal que $\alpha = 1 \oplus x$.

2.- Contracción Geométrica.- Por q-Contracción Geométrica de x se entiende $(1 \oplus x)^q$. Donde x, q son números reales no negativos que no se anulan simultáneamente.

3.- Contracción Factorial.- Para cada par de números reales p, q tales que $p \geq 0$, $q > -1$, se define la q-Contracción Factorial de p mediante las siguientes relaciones:

3-1.- $1^{(q,0\,|\,p)} = 1$

3-2.- $1^{(q,k\,|\,p)} = (1 \oplus (q+k)p).1^{(q,k-1\,|\,p)} \qquad , \qquad k = 1, 2, \cdots$

4.- Función Tau-Beta. – Por Función Tau-Beta se entiende la función

$$\tau_z(x, y) = \frac{\beta(x, y)}{\beta(z, y)} \qquad , \qquad x, y, z > 0$$

donde $\beta(x, y) = \mathrm{Beta}(x, y) \qquad , \qquad$ etc.

4-1.- Nota: La variable z es referida como Base de la función $\tau_z(x, y)$.

5.- Propiedades de la Función Tau-Beta.

5-1.- Ley de Inversión.

$$\tau_z(x, y).\tau_x(z, y) = 1$$

5-2.- Primera Identidad Tau-Beta.

$$\tau_z(z+x, y) = \tau_z(z+y, x)$$

5-3.- Segunda Identidad Tau-Beta.

$$\tau_{z+x}(z, y) = \tau_{z+y}(z, x)$$

5-4.- Teorema de Factorización.

$$\tau_z(x, u+y) = \tau_z(x, u).\tau_{z+u}(x+u, y)$$

5-5.- Teorema de Simplificación.

$$\tau_z(x,y).\tau_x(u,y)=\tau_z(u,y)$$

5-6.- Definición.

$$\tau_0(x,y)=\beta(x,y) \qquad , \qquad x,y>0$$

5-7.- Observaciones:

1) La Ley de Inversión no es aplicable a la función $\tau_0(x,y)$.

2) El Teorema de Factorización es aplicable a la función Beta, en la forma siguiente:

$$\beta(x,u+y)=\beta(x,u).\tau_u(x+u,y)$$

5-8.- Definición.

$$\tau_z(z+x,0)=1 \qquad , \qquad x>0, z>0$$

5-9.- Observación.- La definición 5-8 es compatible con la primera identidad Tau-Beta.

En efecto,

$$\tau_z(z+x,0)=\tau_z(z+0,x)=\tau_z(z,x)=1$$

6.- Teorema.-

$$1^{(q,k\,|\,p)}=\tau_{1+q}(1+q+k,\frac{1}{p}) \qquad , \qquad p>0, q>-1, k=1,2,\cdots$$

7.- Función Geométrico-Factorial. ($\mathcal{H}_{p,q}$)

$$\mathcal{H}_{p,q}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1\oplus x^p\right)^{q+k+1}.1^{(q,k|\,p)} \qquad , \qquad p,q\geq 0, x>0$$

8.- Teorema.- Para cada número entero positivo n,

$$\mathcal{H}_{p,q}(x)=\mathcal{H}_{p,q}^{(n)}(x)+1^{(q,n|\,p)}\mathcal{H}_{p,q+n}(x) \qquad , \qquad p>0$$

Donde, $\mathcal{H}_{p,q}^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1\oplus x^p\right)^{q+k+1}.1^{(q,k|\,p)}$

Demostración.-

8-1.- $\mathcal{H}_{p,q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 \oplus x^{p}\right)^{q+k+1} . 1^{(q,\,k|\,p)}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 \oplus x^{p}\right)^{q+k+1} . 1^{(q,\,k|\,p)} \quad + \quad \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 \oplus x^{p}\right)^{q+k+1} . 1^{(q,\,k|\,p)}$$

$$= \mathcal{H}^{(n)}_{p,q}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 \oplus x^{p}\right)^{q+n+k+1} . 1^{(q,\,n+k|\,p)}$$

Pero,

8-2.- $1^{(q,\,n+k|\,p)} = \tau_{1+q}(1+q+n+k,\, p^{-1}) \qquad , \qquad \text{(Teor. 6)}$

$$= \tau_{1+q}(1+q+p^{-1},\, n+k) \qquad , \qquad (5\text{-}2)$$

$$= \tau_{1+q}(1+q+p^{-1},\, n+k) . \tau_{1+q+n}(1+q+p^{-1}+n,\, k) \qquad , \qquad (5\text{-}4)$$

$$= \tau_{1+q}(1+q+n,\, p^{-1}) . \tau_{1+q+n}(1+q+n+k,\, p^{-1}) \qquad , \qquad (5\text{-}2)$$

$$= 1^{(q,\,n\,|\,p)} . 1^{(q+n,\,k\,|\,p)} \qquad , \qquad \text{(Teor. 6)}$$

Introduciendo en 8-1 el resultado obtenido en 8-2 queda,

8-3.- $\mathcal{H}_{p,q}(x) = \mathcal{H}^{(n)}_{p,q}(x) + 1^{(q,\,n|\,p)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 \oplus x^{p}\right)^{q+n+k+1} . 1^{(q+n,\,k\,|\,p)}$

$$= \mathcal{H}^{(n)}_{p,q}(x) + 1^{(q,\,n|\,p)} \mathcal{H}_{p,\,q+n}(x)$$

$\vdash$

9.- Teorema.-

$$\frac{d}{dx}\mathcal{H}_{p,q}(x) = x^{-1}\left((p-1)\mathcal{H}_{p,q}(x) + (1+pq)(1 \oplus x^{p})^{q+1}\right) \qquad , \qquad x > 0$$

10.- Funciones Contráctiles ($\measuredangle_{p,q}$)

$$\measuredangle_{p,q}(x) = x^{1-p}\mathcal{H}_{p,q}(x) \qquad , \qquad p,q \geq 0 \quad , x > 0$$

11.- Proposición: $\lim_{x \to 0} \measuredangle_{p,q}(x) = 0 \qquad , \qquad p,q \geq 0$

12.- Definición.

$$\measuredangle_{p,q}(0) = 0 \qquad , \qquad p, q \geq 0$$

13.- Teorema.-

$$\frac{d}{dx}\measuredangle_{p,q}(x) = (1+pq)\, x^{-p}(1 \oplus x^{p})^{q+1} \qquad , \qquad x > 0$$

13-1.- Nota.- Otra forma para la derivada de $\measuredangle_{p,q}$ es:

$$\frac{d}{dx}\measuredangle_{p,q}(x) = (1+pq)\,((1 \oplus x^{p})^{q} - (1 \oplus x^{p})^{q+1}) \qquad , \qquad x > 0$$

14.- Teorema.- Si $p > 1$ y $q \geq 0$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\measuredangle_{p,q}(x) = \frac{1+pq}{p}\,\beta(q+\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{p})$$

Demostración.- Usaremos la “Forma Integral” de $\measuredangle_{p,q}$. Esto es,

14-1.- $$\measuredangle_{p,q}(x) = (1+pq)\int_0^x \frac{t^{pq}}{(1+t^{p})^{q+1}}\,dt$$

La forma integral de $\measuredangle_{p,q}$ se obtiene a partir del Teor. 13 y la Prop. 11.

14-2.- De la fórmula 14-1 se tiene,

$$\lim_{x\to\infty}\measuredangle_{p,q}(x) = (1+pq)\int_0^\infty \frac{t^{pq}}{(1+t^{p})^{q+1}}\,dt$$

Haciendo el cambio de variable $u = 1 \oplus t^{p}$ en la integral impropia del segundo miembro en 14-2 queda,

14-3.- $$\lim_{x\to\infty}\measuredangle_{p,q}(x) = \frac{1+pq}{p}\int_0^1 u^{q+\frac{1}{p}-1}(1-u)^{-\frac{1}{p}}\,du$$

$$= \frac{1+pq}{p}\,\beta\left(q+\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{p}\right)$$

$\vdash$

15.- Teorema.- Para cada número entero positivo n,

$$\sphericalangle_{p,q}(x) = \sphericalangle^{(n)}_{p,q}(x) + 1^{(q,\,n|\,p)} \sphericalangle_{p,\,q+n}(x) \qquad , \qquad p, q \geq 0,\ x > 0$$

Donde, $$\sphericalangle^{(n)}_{p,q}(x) = x^{1-p} \mathcal{H}^{(n)}_{p,q}(x) \qquad , \qquad x > 0$$

Demostración.- Este Teorema es una consecuencia inmediata del Teor. 8.

$\vdash$

16.- Proposición.-

$$\sphericalangle_{p,q}(1) \leq \frac{1}{2^q} \qquad , \qquad p,q \geq 0$$

Demostración.-

16-1.- $$\sphericalangle_{p,q}(1) = \mathcal{H}_{p,q}(1) \qquad , \qquad (10)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1 \oplus 1)^{q+k+1} . 1^{(q,\,k\,|\,p)} \qquad , \qquad (7)$$

$$\leq \frac{1}{2^{q+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (1 \oplus 1)^{k}$$

$$= \frac{1}{2^{q+1}} (1+1)$$

$$= \frac{1}{2^q}$$

$\vdash$

17.- Teorema.- Para cada número entero positivo n,

$$\sphericalangle_{p,q}(1) \approx \sphericalangle^{(n)}_{p,q}(1) \qquad , \qquad p, q \geq 0$$

Donde el error en la evaluación aproximada de $\sphericalangle_{p,q}(1)$ es menor que $10^{-\frac{3n}{10}}$.

Demostración.- Con arreglo al Teor. 15, se tiene,

17-1.- $$\sphericalangle_{p,q}(1) = \sphericalangle^{(n)}_{p,q}(1) + 1^{(q,\,n|\,p)} \sphericalangle_{p,\,q+n}(1) \qquad , \qquad n = 1, 2, \cdots$$

17-2.- Pero, $$1^{(q,\,n\,|\,p)} \sphericalangle_{p,q+n}(1) \leq \sphericalangle_{p,\,q+n}(1)$$

$$\leq 2^{-(q+n)} \qquad , \qquad (\text{ Prop. } 16)$$

$$\leq 2^{-n}$$
$$< 10^{-\frac{3n}{10}}$$

$\vdash$

18.- Proposición.- Para cada número real $\alpha > 1$,

$$\angle_{p,q}(\frac{1}{\alpha}) < \frac{1}{(1+\alpha^p)^q} \qquad , \qquad p, q \geq 0$$

Demostración.-

18-1.-
$$\angle_{p,q}(\frac{1}{\alpha}) = \alpha^{p-1}\mathcal{H}_{p,q}(1)$$

$$= \alpha^{p-1}\sum_{k=0}^{\infty}(1\oplus\frac{1}{\alpha^p})^{q+k+1}.1^{(q,k\,|\,p)}$$

$$\leq \alpha^{p-1}\left(1\oplus\frac{1}{\alpha^p}\right)^{q+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1\oplus\frac{1}{\alpha^p}\right)^{k}$$

$$= \alpha^{p-1}\left(1\oplus\frac{1}{\alpha^p}\right)^{q+1}.\left(1+\frac{1}{\alpha^p}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha}.\frac{1}{(1+\alpha^p)^q}$$

$$< \frac{1}{(1+\alpha^p)^q} \qquad , \qquad \alpha > 1$$

$\vdash$

19.- Proposición.- Para cada número real $\alpha > 1$ y cada número entero positivo n,

$$\angle_{p,q}(\frac{1}{\alpha}) \approx \angle_{p,q}^{(n)}(\frac{1}{\alpha}) \qquad , \qquad p, q \geq 0$$

Donde el error en la aproximación es menor que $(1+\alpha^p)^{-n}$.

Demostración.-

19-1.- Aplicando el Teor. 15 se tiene,

$$\angle_{p,q}(\frac{1}{\alpha}) = \angle_{p,q}^{(n)}(\frac{1}{\alpha}) + 1^{(q,\,n|\,p)}\angle_{p,\,q+n}(\frac{1}{\alpha}) \qquad , \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Pero,

19-2.- $$1^{(q,\,n|\,p)}\measuredangle_{p,q+n}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \le \measuredangle_{p,q+n}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \qquad , \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$< \left(1+\alpha^{p}\right)^{-(q+n)} \qquad , \qquad \text{(Prop. 18)}$$

$$\le \left(1+\alpha^{p}\right)^{-n}$$

$\vdash$

20.- Nota: Los Teoremas 17 y 19 proporcionan fórmulas de aproximación para $\measuredangle_{p,q}(x)$ $0<x\le 1$ y tienen incidencia significativa en la evaluación de la función contráctil, con alta precisión.

21.- Complemento Contráctil de $\measuredangle_{p,q}$.- Si $p>1, pq>1$, entonces la función,

$$\overline{\measuredangle}_{p,q}(x) = \frac{1}{pq-1}\measuredangle_{\frac{p}{p-1},q-1}\left(x^{1-p}\right) \qquad , \qquad x>0$$

es referida como “Función Contráctil Complementaria”, o también como “Complemento Contráctil de $\measuredangle_{p,q}$ ”.

22.- Teorema.-

$$\frac{d}{dx}\overline{\measuredangle}_{p,q}(x) = -\frac{1}{(1+x^{p})^{q}}$$

23.- Teorema.- Si $p>1, pq>1,$ entonces,

$$\int_{\alpha}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^{p})^{q}} = \overline{\measuredangle}_{p,q}(\alpha) \qquad , \qquad \alpha>0$$

24.- El número Sigma ($\triangledown$)

Sea $x_0, x_1, \cdots$ una sucesión de números reales que satisface las siguientes relaciones:

24-1.- $$x_0 = 1 \quad , \quad x_k = \frac{k}{2+4k}x_{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \cdots$$

Luego,

24-2.- $$x_k < \frac{1}{4^k} \quad , \quad k = 1, 2, \cdots$$

Sea ahora

24-3.- $$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} x_k \quad , \quad n = 1, 2, \cdots$$

Para S_n se tiene,

24-4.- $$1 < S_n < \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{4^k} \quad , \quad n = 1, 2, \cdots$$

De donde,

24-5.- $$1 < S_n < \frac{4}{3} \quad , \quad n = 1, 2, \cdots$$

De 24-5 se deduce que existe un número real σ (sigma) tal que,

24-6.- $$\sigma = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Puede probarse que en rigor, σ satisface la desigualdad,

24-7.- $$1 < \sigma < \frac{4}{3}$$

Otra forma para el número σ es:

24-8.- $$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

A partir de la igualdad 24-8, puede obtenerse una fórmula de aproximación para el número σ. En efecto,

24-9.- $$\sigma \approx \sum_{k=0}^{k=n} x_k \quad , \quad n = 1, 2, \cdots$$

con un error menor que $10^{-\frac{3n}{5}}$.

Ahora bien, la siguiente sucesión de números reales satisface las condiciones enunciadas en 24-1,

24-10.- $$x_k = \frac{k!}{2^k . 1.3. \cdots .(1+2k)} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

La fórmula

24-11.- $$\nabla \approx \sum_{k=0}^{k=100} \frac{k!}{2^k.1.3.\cdots.(1+2k)}$$

permite obtener la siguiente aproximación para el número ∇.

24-12.- $$\nabla \approx 1.2091995761\ \ 5614523372\ \ 9385505094$$
$$7704881893\ \ 7749872849\ \ 3717046589...$$

con un error menor que 10^{-60}.

24-13.- Nota: La fracción $\frac{3428}{2835}$ genera una aproximación a ∇ con cuatro dígitos decimales correctos. En efecto,

$$\frac{3428}{2835} = 1.2091(71076\cdots)$$

25.- Teorema.-

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta(k,k) = \nabla$$

Demostración.-

25-1.- $$\sum_{k=1}^{\infty} \beta(k,k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\beta\left(\frac{1}{2},k\right)}{4^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\beta\left(\frac{1}{2},k+1\right)}{4^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2.k!}{4^{k+1}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\cdots.(\frac{1}{2}+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2.k!}{2^k.1.3.\cdots.(1+2k)}$$

$$= \nabla$$

├

26.- Problema.- Evaluar La integral definida,

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x+x^2}\,dx$$

Solución.-

26-1) $$\int_0^1 \frac{1}{1-x+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1-x(1-x)}\,dx$$

$$= \int_0^1 (\sum_{k=0}^{\infty} \left(x(1-x)\right)^k)\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x\right)^{k-1} (1-x)^{k-1}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \beta(k,k)$$

$$= \nabla$$

27.- Nota. Los resultados siguientes pueden obtenerse a partir del Prob. 26.-

27-1.- $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{3}\mathrm{Ln}2$$

27-2.- $$\int_0^1 \frac{x}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{3}\mathrm{Ln}2$$

27-3.- $$\int_1^{\infty} \frac{1}{1-x+x^2}\,dx = \nabla$$

27-4.- $$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x+x^2}\,dx = \nabla$$

27-5.- $$\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\nabla$$

27-6.- $$\int_1^2 \frac{1}{1-x+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\nabla$$

27-7.- $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2+x^4}\,dx = \frac{3}{8}\nabla + \frac{1}{4}\mathrm{Ln}3$$

27-8.- $$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4+x^8}\,dx = \frac{3}{4}\nabla$$

27-9.- $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\nabla$$

27-10.- $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{4}\nabla + \frac{1}{6}\mathrm{Ln}3$$

27-11.- $\int_0^2 \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{3}{4}\nabla + \frac{1}{6}\mathrm{Ln}3$

27-12.- $\int_0^\infty \frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}\,dx = \frac{1}{2}\nabla$

Los resultados 27-1, 27-10 y 27-11 implican respectivamente, los siguientes:

27-13.- $\angle_3(1) = \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{3}\mathrm{Ln}2$

27-14.- $\angle_3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\nabla + \frac{1}{6}\mathrm{Ln}3$

27-15.- $\angle_3(2) = \frac{3}{4}\nabla + \frac{1}{6}\mathrm{Ln}3$

El resultado 27-2 implica,

27-16.- $\angle_{\frac{3}{2}}(1) = \nabla - \frac{2}{3}\mathrm{Ln}2$

28.- Problema.- Evaluar la integral definida,

$$\int_1^8 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{3}}}\,dx$$

Solución.-

28-1)
$$\begin{aligned}
\int_1^8 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{3}}}\,dx &= \int_1^8 \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{1+x}\,dx \\
&= 3\angle_3(x^{\frac{1}{3}})\Big|_1^8 \\
&= 3\,(\angle_3(2) - \angle_3(1)) \\
&= 3\,(\frac{3}{4}\nabla + \frac{1}{6}\mathrm{Ln}3 - (\frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{3}\mathrm{Ln}2)) \qquad , \quad (27\text{-}13, 27\text{-}15) \\
&= \frac{3}{4}\nabla + \frac{1}{2}\mathrm{Ln}3 - \mathrm{Ln}2
\end{aligned}$$

II.- EVALUACIÓN DE LA FUNCIÓN BETA

Sean u, v números reales tales que $0 < u < 1$, $0 < v < 1$. Para $\beta(u, v)$ se tiene,

1. - $$\beta(u,v) = \int_0^\infty \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\,dt + \int_1^\infty \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\,dt$$

$$= \frac{1}{u} \lessdot_{\frac{1}{1-v},\, u+v-1}(1) \quad + \quad \frac{1}{u} \bar{\lessdot}_{\frac{1}{u},\, u+v}(1)$$

De donde,

1-1.- $$\beta(u,v) = \frac{1}{u} \lessdot_{\frac{1}{1-v},\, u+v-1}(1) \quad + \quad \frac{1}{v} \lessdot_{\frac{1}{1-u},\, u+v-1}(1)$$

Si $u+v = 1$, entonces 1-1 queda,

1-2.- $$\beta(u,v) = \frac{1}{u} \lessdot_{\frac{1}{u}}(1) \quad + \quad \frac{1}{v} \lessdot_{\frac{1}{v}}(1)$$

Si $0 < u < 1$,

1-3.- $$\beta(u,u) = \frac{2}{u} \lessdot_{\frac{1}{1-u},\, 2u-1}(1)$$

2.- Ejemplos

2-1.- $$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 4 \lessdot_{2}(1) \qquad , \qquad (1\text{-}3)$$

$$= 4.\frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

2-2.- $$\beta\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3 \lessdot_{3}(1) + \frac{3}{2} \lessdot_{\frac{3}{2}}(1) \qquad , \qquad (1\text{-}2)$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{3}\mathrm{Ln}\,2\right) + \frac{3}{2}\left(\nabla - \frac{2}{3}\mathrm{Ln}\,2\right)$$

$$= 3\nabla$$

2-3.- $$\beta\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=4\angle_{4}(1)+\frac{4}{3}\angle_{\frac{4}{3}}(1) \qquad , \qquad (1\text{-}2)$$
$$=4(\angle_{4}(1)+\overline{\angle}_{4}(1))$$
$$=4\left(\frac{\pi+2\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}+\frac{\pi-2\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}\right)$$
$$=\pi\sqrt{2}$$

2-4.- $$\beta\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)=6\angle_{6}(1)+\frac{6}{5}\angle_{\frac{6}{5}}(1)$$
$$=6(\angle_{6}(1)+\overline{\angle}_{6}(1))$$
$$=6\left(\frac{\pi-\sqrt{3}\,\mathrm{Ln}(2-\sqrt{3})}{6}+\frac{\pi+\sqrt{3}\,\mathrm{Ln}(2-\sqrt{3})}{6}\right)$$
$$=2\pi$$

Comentario.- Salvo la “novedad teórica” presentada en 2-2; los ejemplos anteriores tienen como único objetivo, mostrar que la fórmula 1-2 es compatible con la conocida fórmula:

2-5.- $$\beta(\alpha,1-\alpha)=\alpha\,\csc(\alpha\pi) \qquad , \qquad 0<\alpha<1$$

A partir de las fórmulas 1-2 y 2-5 se determinó la siguiente colección de valores notables de $\beta(u,v)$.

3.- Valores notables de $\beta(u,v)$, $u+v=1$

3-1.- $$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$$

3-2.- $$\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=3\,\nabla$$

3-3.- $$\beta\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\pi\sqrt{2}$$

3-4.- $$\beta\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)=\frac{\pi\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5}$$

3-5.- $$\beta\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)=\frac{\pi\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5}$$

3-6.- $\beta\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)=2\pi$

3-7.- $\beta\left(\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right)=7(\angle_7(1)+\overline{\angle}_7(1))$

3-8.- $\beta\left(\frac{2}{7},\frac{5}{7}\right)=\frac{7}{2}(\angle_{\frac{7}{2}}(1)+\overline{\angle}_{\frac{7}{2}}(1))$

3-9.- $\beta\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7}\right)=\frac{7}{3}(\angle_{\frac{7}{3}}(1)+\overline{\angle}_{\frac{7}{3}}(1))$

3-10.- $\beta\left(\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right)=\pi\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

3-11.- $\beta\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)=\pi\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

3-12.- $\beta\left(\frac{1}{10},\frac{9}{10}\right)=\pi(\sqrt{5}+1)$

3-13.- $\beta\left(\frac{3}{10},\frac{7}{10}\right)=\pi(\sqrt{5}-1)$

3-14.- $\beta\left(\frac{1}{12},\frac{11}{12}\right)=\frac{9}{\sqrt{2}}\nabla+\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$

3-15.- $\beta\left(\frac{5}{12},\frac{7}{12}\right)=\frac{9}{\sqrt{2}}\nabla-\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$

3-16.- $\beta\left(\frac{1}{15},\frac{14}{15}\right)=\pi\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\frac{9}{2}\nabla$

3-17.- $\beta\left(\frac{4}{15},\frac{11}{15}\right)=\pi\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\frac{9}{2}\nabla$

3-18.- $\beta\left(\frac{2}{15},\frac{13}{15}\right)=\frac{9}{2}\nabla+\pi\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

3-19.- $\beta\left(\frac{7}{15},\frac{8}{15}\right)=\frac{9}{2}\nabla-\pi\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

3-20.- $$\beta\left(\frac{1}{16},\frac{15}{16}\right)=\pi\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

3-21.- $$\beta\left(\frac{1}{20},\frac{19}{20}\right)=\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}(3+\sqrt{5})+2\sqrt{5+\sqrt{5}})$$

3-22.- $$\beta\left(\frac{1}{30},\frac{29}{30}\right)=\pi(2+\sqrt{5}+\sqrt{15+6\sqrt{5}})$$

3-23.- $$\beta\left(\frac{1}{60},\frac{59}{60}\right)=\frac{4\pi}{\sqrt{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}$$

Obsérvese en detalle la solución de los problemas que siguen:

4.- Problema.- Evaluar la integral impropia,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^4+x^8}$$

Solución.-

4-1.- $$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^4+x^8}=\int_0^\infty \frac{1+x^4}{1+x^{12}}\,dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{12}}\,dx+\int_0^\infty \frac{x^4}{1+x^{12}}\,dx$$

$$=\frac{1}{12}\beta\left(\frac{1}{12},\frac{11}{12}\right)+\frac{1}{12}\beta\left(\frac{5}{12},\frac{7}{12}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\nabla+\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\nabla-\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right) \qquad , \qquad (3\text{-}14,3\text{-}15)$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\nabla$$

5.- Problema.- Evaluar la integral impropia,

$$\int_0^\infty \frac{x}{1-x^5+x^{10}}\,dx$$

Solución.-

5-1.- $$\int_0^\infty \frac{x}{1-x^5+x^{10}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x(1+x^5)}{1+x^{15}}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x}{1+x^{15}}\,dx + \int_0^\infty \frac{x^6}{1+x^{15}}\,dx$$

$$= \frac{1}{15}\beta\left(\frac{2}{15},\frac{13}{15}\right) + \frac{1}{15}\beta\left(\frac{7}{15},\frac{8}{15}\right)$$

$$= \frac{1}{30}(9\,\nabla + 2\pi\sqrt{5-2\sqrt{5}}) + \frac{1}{30}(9\,\nabla - 2\pi\sqrt{5-2\sqrt{5}})$$

(3-18,3-19)

$$= \frac{3}{5}\nabla$$

6.- Problema.- Evaluar la integral impropia,

$$\int_0^\infty (x^2\,\mathrm{Ln}(1+x^9) - 9x^2\,\mathrm{Ln}(x))\,dx$$

Solución.- Sea λ el valor numérico de la integral del Prob. 6.

6-1.- $$\lambda = \int_0^\infty x^2(\mathrm{Ln}(1+x^9) - \mathrm{Ln}(x^9))\,dx$$

$$= \int_0^\infty x^2\,\mathrm{Ln}(1+x^{-9})\,dx$$

$$= \int_0^\infty x^2 \lessdot_1\left(x^{-9}\right)dx$$

$$= \int_0^\infty x^2 \mathcal{H}_1\left(x^{-9}\right)dx$$

$$= \int_0^\infty (x^2 \sum_{k=0}^\infty (1\oplus x^{-9})^{k+1}.1^{(k\,|1)})dx$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \left(\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^9)^{k+1}}\,dx\right).1^{(k\,|1)}$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{9}\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}+k\right)\tau_1(1+k,1)$$

$$= \frac{\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}{9}\sum_{k=0}^\infty \tau_{\frac{2}{3}}(1,k)\,\tau_1(2,k)$$

$$=\frac{1}{3}\,\overline{\nabla}\sum_{k=0}^{\infty}\ \tau_{\frac{2}{3}}\left(1,k\right)\tau_{1}\left(2,k\right)\qquad,\qquad(3-2)$$

$$=\frac{1}{3}\,\overline{\nabla}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{\frac{2}{3}}\left(2,k\right)$$

$$=\frac{1}{3}\,\overline{\nabla}\,\frac{1}{2-\frac{2}{3}-1}$$

$$=\overline{\nabla}$$

7.- Problema.- Evaluar la integral doble,

$$\int_{0}^{\infty}\int_{y}^{\infty}\frac{x^{14}\ y^{2}}{1-x^{10}+x^{20}}\,dx\,dy$$

Solución.- Sea λ el valor numérico de la integral del Prob. 7.

7-1.- $$\lambda=\int_{0}^{\infty}\int_{y}^{\infty}\frac{x^{14}\ y^{2}}{1-x^{10}+x^{20}}\,dx\,dy$$

Luego,

7-2.- $$\lambda=\int_{0}^{\infty}\int_{y}^{\infty}\frac{x^{14}\ y^{2}(1+x^{10})}{1+x^{30}}\,dx\,dy$$

$$=\int_{0}^{\infty}\int_{y}^{\infty}\frac{x^{14}\ y^{2}}{1+x^{30}}\,dx\,dy+\int_{0}^{\infty}\int_{y}^{\infty}\frac{x^{24}\ y^{2}}{1+x^{30}}\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{15}\int_{0}^{\infty}y^{2}\,\overline{\angle}_{2}(y^{15})\,dy+\frac{1}{25}\int_{0}^{\infty}y^{2}\,\overline{\angle}_{\frac{6}{5}}(y^{25})\,dy$$

$$=\frac{1}{15}\int_{0}^{\infty}y^{2}\,\angle_{2}(y^{-15})\,dy+\frac{1}{5}\int_{0}^{\infty}y^{2}\,\angle_{6}(y^{-5})\,dy$$

Evaluando separadamente cada término del segundo miembro en 7-2 se tiene,

7-3.- $$\frac{1}{15}\int_{0}^{\infty}y^{2}\,\angle_{2}(y^{-15})\,dy=\frac{1}{15}\int_{0}^{\infty}y^{17}\,\mathcal{H}_{2}(y^{-15})\,dy$$

$$=\frac{1}{15}\int_{0}^{\infty}(y^{17}\sum_{k=0}^{\infty}(1\oplus y^{-30})^{k+1}.1^{(k\,|\,2)})dy$$

$$=\frac{1}{15}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{y^{17}}{\left(1+y^{30}\right)^{k+1}}\,dy\right).1^{(k\,|\,2)}$$

$$=\frac{1}{450}\sum_{k=0}^{\infty}\beta\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}+k\right).\tau_{1}(1+k,\frac{1}{2})$$

$$=\frac{\beta\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)}{450}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{\frac{2}{5}}(1,k).\tau_1\left(\frac{3}{2},k\right)$$

$$=\frac{\beta\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)}{450}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{\frac{2}{5}}\left(\frac{3}{2},k\right)$$

$$=\frac{\beta\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)}{450}.\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{5}-1}$$

$$=\frac{\beta\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)}{90}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{450} \qquad , \qquad (3-5)$$

7-4.-

$$\frac{1}{5}\int_0^{\infty} y^2 \prec_6(y^{-5})\,dy=\frac{1}{5}\int_0^{\infty} y^{27}\mathcal{H}_6(y^{-5})\,dy$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^{\infty}(y^{27}\sum_{k=0}^{\infty}(1\oplus y^{-30})^{k+1}.1^{(k|6)})dy$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{y^{27}}{\left(1+y^{30}\right)^{k+1}}\,dy\right).1^{(k|6)}$$

$$=\frac{1}{150}\sum_{k=0}^{\infty}\beta\left(\frac{14}{15},\frac{1}{15}+k\right).\tau_1(1+k,\frac{1}{6})$$

$$=\frac{\beta\left(\frac{14}{15},\frac{1}{15}\right)}{150}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{\frac{1}{15}}(1,k).\tau_1\left(\frac{7}{6},k\right)$$

$$=\frac{\beta\left(\frac{14}{15},\frac{1}{15}\right)}{150}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{\frac{1}{15}}\left(\frac{7}{6},k\right)$$

$$=\frac{\beta\left(\frac{14}{15},\frac{1}{15}\right)}{150}.\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}-\frac{1}{15}-1}$$

$$=\frac{\beta\left(\frac{14}{15},\frac{1}{15}\right)}{90}$$

$$=\frac{2\pi\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{180}+\frac{9}{180}\,\triangledown \qquad , \qquad (3-16)$$

Introduciendo en 7-2 los valores obtenidos en 7-3 y 7-4 queda,

7-5.-
$$\lambda = \frac{\pi\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{450} + \frac{2\pi\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{180} + \frac{9}{180} \nabla$$
$$= \frac{\pi\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{150} + \frac{1}{20} \nabla$$

Esto es,

7-6.-
$$\int_0^\infty\int_y^\infty \frac{x^{14}\ y^2}{1-x^{10}+x^{20}}\,dx\,dy = \frac{\pi\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{150} + \frac{1}{20} \nabla$$
$$\approx 0.204594356$$

8.- Teorema.- Si $0<u<1$, entonces

$$\beta(u,u) = \frac{2}{u.4^u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{2u}(1+u,k)}{2^k}$$

Demostración.-

8-1.-
$$\beta(u,u) = \frac{2}{u} \lhd_{\frac{1}{1-u},2u-1}(1) \qquad , \qquad 0<u<1 \quad , \quad (1\text{-}2)$$
$$= \frac{2}{u}\sum_{k=0}^{\infty}(1\oplus 1)^{2u+k}.1^{(2u-1,k\,|\,\frac{1}{1-u})}$$
$$= \frac{2}{u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2u+k}}.\tau_{2u}(2u+k,1-u)$$
$$= \frac{2}{u.4^u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{2u}(u+1,k)}{2^k}$$
$$\vdash$$

Comentario.- La fórmula proporcionada en el Teor. 8 genera en cada caso, una serie numérica para evaluar $\beta(u,u)$, $0<u<1$.

Ejemplos.

8-2.-
$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_1(\frac{3}{2},k)}{2^k}$$
$$= 2\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_1(\frac{3}{2},k)}{2^k}\right)$$

$$= 2(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.2.\cdots.k}{2^k.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\cdots.(\frac{1}{2}+k)})$$

$$= 2(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.2.\cdots.k}{3.5.7.\cdots.(1+2k)})$$

$$= \pi$$

Nota: El resultado

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \cdots + = \frac{\pi}{2}$$

lo obtuvo Leonhard Euler.

8-3.- $$\beta\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{\sqrt[3]{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_{\frac{2}{3}}(\frac{4}{3}, k)}{2^k}$$

$$= 3\sqrt[3]{2}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{\frac{2}{3}}(\frac{4}{3}, k)}{2^k})$$

$$= 3\sqrt[3]{2}(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_{\frac{2}{3}}(\frac{4}{3}, k+1)}{2^{k+1}})$$

$$= 3\sqrt[3]{2}\ (1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{2}{3}.\frac{5}{3}.\frac{8}{3}.\cdots.(\frac{2}{3}+k)}{2^{k+1}.\frac{4}{3}.\frac{7}{3}.\frac{10}{3}.\cdots.(\frac{4}{3}+k)})$$

$$= 3\sqrt[3]{2}\ (1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2.5.8.\cdots.(2+3k)}{2^{k+1}.4.7.10.\cdots.(4+3k)})$$

Los siguientes resultados se obtienen también, mediante la aplicación del Teor. 8.

8-4.- $$\beta\left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right) = \frac{7\sqrt[7]{8}}{2}\ (1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4.11.18.\cdots.(4+7k)}{2^{k+1}.9.16.23.\cdots.(9+7k)})$$

8-5.- $$\beta\left(\frac{5}{11}, \frac{5}{11}\right) = \frac{11\sqrt[11]{2}}{5}\ (1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{10.21.32.\cdots.(10+11k)}{2^{k+1}.16.27.38.\cdots.(16+11k)})$$

8-6.- $\beta\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{4^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}\,(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2.(2+\sqrt{3})(2+2\sqrt{3}).\cdots.(2+(k-1)\sqrt{3})}{2^{k}.(1+\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})(1+3\sqrt{3}).\cdots.(1+k\sqrt{3})})$

Observación: El Teor. 8 tiene una implicación importante.
En efecto, el Teor. 8 implica

8-7.- $\frac{4^{u}\beta(u,u)}{2}=\frac{1}{u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{2u}(1+u,k)}{2^{k}}\qquad , \qquad 0<u<1$

De donde,

8-8.- $\beta\left(\frac{1}{2},u\right)=\frac{1}{u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{2u}(1+u,k)}{2^{k}}\qquad , \qquad 0<u<1$

Ejemplo.

8-9.- $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{\frac{1}{2}}(\frac{5}{4},k)}{2^{k}}\qquad , \qquad (8\text{-}8)$

$$=4(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{\frac{1}{2}}(\frac{5}{4},k+1)}{2^{k+1}})$$

$$=4\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\cdots.(\frac{1}{2}+k)}{2^{k+1}.\frac{5}{4}.\frac{9}{4}.\frac{13}{4}.\cdots.(\frac{5}{4}+k)})$$

$$=4\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1.3.5.\cdots.(1+2k)}{5.9.13.\cdots.(5+4k)})$$

Los siguientes resultados se obtienen también a partir de la fórmula 8-8.

8-10.- $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{2}{13}\right)=\frac{13}{2}\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4.17.30.\cdots.(4+13k)}{2^{k+1}.15.28.41.\cdots.(15+13k)})$

8-11.- $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)=6\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1.4.7.\cdots.(1+3k)}{7.13.19.\cdots.(7+6k)})$

9.- Teorema.- Si $u,v,x,y>0$, entonces

$$\beta(u+x,v+y)=\beta(u,v)\,\tau_{u}\,(u+v,x)\,\tau_{v}(u+v+x,y)$$

Demostración.- Es suficiente aplicar dos veces el teorema de Factorización para la función Beta.

9-1.- $$\beta(u+x,v+y)=\beta(u+x,v)\,\tau_v\,(u+v+x,y)$$

$$=\beta(u,v)\,\tau_u\,(u+v,x)\,\tau_v\,(u+v+x,y)$$

$\vdash$

El Teor. 9 permite dar mayor alcance a las aplicaciones del Teor. 8 y de la fórmula 8-8.

Ejemplo.-

9-2.- $$\begin{aligned}\beta\left(\frac{7}{2},\frac{9}{4}\right)&=\beta\left(\frac{1}{2}+3,\frac{1}{4}+2\right)\\ &=\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\tau_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{4},3\right)\tau_{\frac{1}{4}}\left(\frac{15}{4},2\right)\\ &=\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right).\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}.\frac{7}{4}.\frac{11}{4}}.\frac{\frac{1}{4}.\frac{5}{4}}{\frac{15}{4}.\frac{19}{4}}\\ &=\frac{40}{4389}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\\ &=\frac{160}{4389}\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1.3.5.\cdots.(1+2k)}{5.9.13.\cdots.(5+4k)})\qquad ,\qquad (8\text{-}9)\end{aligned}$$

10.- Teorema.- Si $0<u<1$ y $0<v<1$, entonces

$$\beta(u,v)=\frac{1}{2^{u+v}}\left(\frac{1}{u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{u+v}(1+u,k)}{2^k}+\frac{1}{v}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{u+v}(1+v,k)}{2^k}\right)$$

Demostración.- Con arreglo a la fórmula 1-1 se tiene,

10-1.- $$\begin{aligned}\beta(u,v)&=\frac{1}{u}\angle_{\frac{1}{1-v},u+v-1}(1)\;+\;\frac{1}{v}\angle_{\frac{1}{1-v},u+v-1}(1)\quad ,\quad 0<u<1\,,\,0<v<1\\ &=\frac{1}{u}\sum_{k=0}^{\infty}(1\oplus 1)^{u+v+k}\,.1^{\left(u+v-1,\,k\;\middle|\frac{1}{1-v}\right)}+\frac{1}{v}\sum_{k=0}^{\infty}(1\oplus 1)^{u+v+k}\,.1^{\left(u+v-1,\,k\;\middle|\frac{1}{1-u}\right)}\\ &=\frac{1}{u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{u+v}(u+v+k,1-v)}{2^{u+v+k}}+\frac{1}{v}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{u+v}(u+v+k,1-u)}{2^{u+v+k}}\\ &=\frac{1}{2^{u+v}}\left(\frac{1}{u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{u+v}(1+u,k)}{2^k}+\frac{1}{v}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{u+v}(1+v,k)}{2^k}\right)\end{aligned}$$

$\vdash$

La siguiente fórmula para la evaluación numérica de $\beta\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$ se obtuvo mediante la aplicación del Teor. 10.

10-2.- $\beta\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt[12]{32}}{2}\left(7+3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{7.19.\cdots.(7+12k)}{8^{k+1}.4.7.\cdots.(4+3k)}+4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{7.19.\cdots.(7+12k)}{6^{k+1}.5.9.\cdots.(5+4k)}\right)$

Observación.- Los Teoremas 9 y 10 son suficientes para generar series numéricas para la evaluación de $\beta(x,y)$, $x,y>0$.

III.- SOBRE LA EVALUACIÓN DE LA FUNCIÓN GAMA

1.- Teorema.- Si $0 < u < 1$, entonces,

$$\Gamma^2(u) = \frac{2\,\Gamma(2u)}{u} \measuredangle_{\frac{1}{1-u}\,,\,2u-1}(1)$$

Demostración.- El Teorema es evidente, con arreglo a la conocida fórmula

1-1.- $$\Gamma^2(u) = \Gamma(2u)\,\beta(u,u)$$

y a la fórmula

2-1.- $$\beta(u,u) = \frac{2}{u} \measuredangle_{\frac{1}{1-u}\,,\,2u-1}(1) \quad , \quad 0 < u < 1 \quad , \quad \text{(II.1-3)}$$

$$\vdash$$

Comentario.- El Teor. 1 es una “Formula de Duplicación” para la función gama.- Esta fórmula, junto a la ecuación funcional $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$ y al Teorema de los complementos $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \pi\csc(\alpha\pi)$ $, 0 < \alpha < 1$, hace posible la evaluación de $\Gamma(u)$, cuando u es un número racional.-

Ejemplos.-

2.- Evaluación de $\Gamma(\frac{1}{2})$

2-1.- $$\Gamma^2(\frac{1}{2}) = 4\,\Gamma(1) \measuredangle_2(1) \qquad \text{(Teor. 1)}$$
$$= 4\,\frac{\pi}{4}$$
$$= \pi$$

2-2.- $$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

3.- Evaluación de $\Gamma(\frac{1}{3})$

3-1.- $$\Gamma^2(\frac{1}{3}) = 6\,\Gamma(\frac{2}{3}) \measuredangle_{\frac{3}{2},\,-\frac{1}{3}}(1) \qquad \text{(Teor. 1)}$$

luego,

3-2.- $$\Gamma^3(\frac{1}{3}) = 6\,\Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3}) \measuredangle_{\frac{3}{2},\,-\frac{1}{3}}(1)$$

$$= 18\ \nabla <_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1)$$

De donde,

3-3.- $$\Gamma(\frac{1}{3}) = (18\,\nabla <_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1))^{\frac{1}{3}}$$

La fórmula explícita 3-3 permite hacer la evaluación de $\Gamma(\frac{1}{3})$ con alta precisión.

Hay otra fórmula para $\Gamma(\frac{1}{3})$ que proviene también de la aplicación del Teor. 1.

En efecto, de 3-1 se tiene,

3-4.- $$\Gamma^4(\frac{1}{3}) = 36\,\Gamma^2(\frac{2}{3})\,(<_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1))^2$$

$$= 108\,\Gamma(\frac{4}{3})\ <_{3,\frac{1}{3}}(1)\,(<_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1))^2 \qquad \text{(Teor. 1)}$$

$$= 36\,\Gamma(\frac{1}{3})\ <_{3,\frac{1}{3}}(1)\,(<_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1))^2$$

Por lo tanto,

3-5.- $$\Gamma^3(\frac{1}{3}) = 36\ <_{3,\frac{1}{3}}(1)\,(<_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1))^2$$

Esto es,

3-6.- $$\Gamma(\frac{1}{3}) = (36\ <_{3,\frac{1}{3}}(1)\,(<_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1))^2)^{\frac{1}{3}}$$

La siguiente evaluación para $\Gamma(\frac{1}{3})$ se obtuvo de la aplicación directa de la fórmula 3-6:

3-7.- $$\Gamma(\frac{1}{3}) = 2.6789385347077476$$

Las fórmulas 3-2 y 3-5 tienen una implicación teórica relevante. En efecto, comparando los segundos miembros de ambas fórmulas se tiene,

3-8.- $$18\,\nabla <_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1) = 36\ <_{3,\frac{1}{3}}(1)\,(<_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1))^2$$

Esto es,

3-9.- $$\nabla = 2\ <_{3,\frac{1}{3}}(1)\ <_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1)$$

4.- Evaluación de $\Gamma(\frac{2}{3})$

4-1.- $$\Gamma^2(\frac{2}{3}) = 3\,\Gamma(\frac{4}{3}) \prec_{3,\frac{1}{3}}(1) \qquad \text{(Teor. 1)}$$
$$= \Gamma(\frac{1}{3}) \prec_{3,\frac{1}{3}}(1)$$

luego,

4-2.- $$\Gamma^6(\frac{2}{3}) = \Gamma^3(\frac{1}{3})\,(\prec_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1))^3$$
$$= 18\,\nabla \prec_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1)\,(\prec_{3,\frac{1}{3}}(1))^3 \qquad , \qquad (3\text{-}2)$$
$$= 9\,\nabla^2 (\prec_{3,\frac{1}{3}}(1))^2 \qquad , \qquad (3\text{-}9)$$

De 4-2 se tiene,

4-3.- $$\Gamma^3(\frac{2}{3}) = 3\ \nabla \prec_{3,\frac{1}{3}}(1)$$

Esto es,

4-4.- $$\Gamma(\frac{2}{3}) = (3\ \nabla \prec_{3,\frac{1}{3}}(1))^{\frac{1}{3}}$$

5.- Evaluación de $\Gamma(\frac{1}{4})$ y $\Gamma(\frac{3}{4})$

5-1.- $$\Gamma^2(\frac{1}{4}) = 8\,\Gamma(\frac{1}{2}) \prec_{\frac{4}{3},-\frac{1}{2}}(1) \qquad \text{(Teor. 1)}$$
$$= 8\sqrt{\pi} \prec_{\frac{4}{3},-\frac{1}{2}}(1)$$

luego,

5-2.- $$\Gamma(\frac{1}{4}) = 2\,(2\sqrt{\pi} \prec_{\frac{4}{3},-\frac{1}{2}}(1))^{\frac{1}{2}}$$

5-3.- $$\Gamma^2(\frac{3}{4}) = \frac{8}{3}\,\Gamma(\frac{3}{2}) \prec_{4,\frac{1}{2}}(1) \qquad \text{(Teor. 1)}$$
$$= \frac{4}{3}\Gamma(\frac{1}{2}) \prec_{4,\frac{1}{2}}(1)$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{\pi} \lessdot_{4,\frac{1}{2}}(1)$$

5-4.- $$\Gamma(\frac{3}{4}) = 2(\frac{\sqrt{\pi}}{3} \lessdot_{4,\frac{1}{2}}(1))^{\frac{1}{2}}$$

La siguiente evaluación para $\Gamma(\frac{1}{4})$ se hizo mediante la aplicación de la fórmula 5-2.

5-5.- $$\Gamma(\frac{1}{4}) = 3.6256099082219083$$

Hay también, un resultado relevante que se obtiene de las fórmulas 5-1 y 5-3. En efecto, combinando ambas fórmulas se tiene,

5-6.- $$(\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(\frac{3}{4}))^2 = \frac{32\pi}{3} \lessdot_{4,\frac{1}{2}}(1) \lessdot_{\frac{4}{3},-\frac{1}{2}}(1)$$

De donde,

5-7.- $$(\pi\sqrt{2})^2 = \frac{32\pi}{3} \lessdot_{4,\frac{1}{2}}(1) \lessdot_{\frac{4}{3},-\frac{1}{2}}(1)$$

De 5-7 se obtiene una fórmula para el número π en términos de funciones contráctiles.

5-8.- $$\pi = \frac{16}{3} \lessdot_{4,\frac{1}{2}}(1) \lessdot_{\frac{4}{3},-\frac{1}{2}}(1)$$

El siguiente problema tiene importancia teórica.

6.- Problema.- Probar que,

$$\triangledown = \frac{32}{15} \lessdot_{6,\frac{2}{3}}(1) \lessdot_{\frac{6}{5},-\frac{2}{3}}(1)$$

Solución.- La forma de las funciones contráctiles del segundo miembro en la igualdad proporcionada en el Prob. 6, conducen a $\Gamma(\frac{1}{6})$ y $\Gamma(\frac{5}{6})$.

6-1.- $$\Gamma^2(\frac{1}{6}) = 12\,\Gamma(\frac{1}{3}) \lessdot_{\frac{6}{5},-\frac{2}{3}}(1) \qquad \text{(Teor. 1)}$$

6-2.- $$\Gamma^2(\frac{5}{6}) = \frac{12}{5}\,\Gamma(\frac{5}{3}) \lessdot_{6,\frac{2}{3}}(1) \qquad \text{(Teor. 1)}$$

$$=\frac{8}{5}\,\Gamma(\frac{2}{3})\prec_{6,\frac{2}{3}}(1)$$

De 6-1 y 6-2 se tiene,

6-3.- $$(\Gamma(\frac{1}{6})\,\Gamma(\frac{5}{6}))^2=\frac{96}{5}\,\Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})\prec_{6,\frac{2}{3}}(1)\;\prec_{\frac{6}{5},-\frac{2}{3}}(1)$$

$$=\frac{96}{5}\,3\,\nabla\prec_{6,\frac{2}{3}}(1)\;\prec_{\frac{6}{5},-\frac{2}{3}}(1)$$

$$=\frac{288}{5}\;\nabla\prec_{6,\frac{2}{3}}(1)\;\prec_{\frac{6}{5},-\frac{2}{3}}(1)$$

Por lo tanto,

6-4.- $$4\pi^2=\frac{288}{5}\;\nabla\prec_{6,\frac{2}{3}}(1)\;\prec_{\frac{6}{5},-\frac{2}{3}}(1)$$

De donde,

6-5.- $$\pi^2=\frac{72}{5}\;\nabla\prec_{6,\frac{2}{3}}(1)\;\prec_{\frac{6}{5},-\frac{2}{3}}(1)$$

Pero

6-6.- $$\pi^2\,/\,\nabla^2=\frac{27}{4}$$

Introduciendo 6-6 en 6-5 se obtiene el resultado,

6-7.- $$\nabla=\frac{32}{15}\prec_{6,\frac{2}{3}}(1)\;\prec_{\frac{6}{5},-\frac{2}{3}}(1)$$

Las siguientes fórmulas han sido obtenidas a partir también, del Teor. 1.

7.- Evaluación de $\Gamma(\frac{1}{5})$

7-1.- $$\Gamma(\frac{1}{5})=(100\,\pi\,\sqrt{50+10\sqrt{5}}\prec_{\frac{5}{3},-\frac{1}{5}}(1)\,(\prec_{\frac{5}{4},-\frac{3}{5}}(1))^2)^{\frac{1}{5}}$$

8.- Evaluación de $\Gamma(\frac{1}{7})$

8-1.- $$\Gamma(\frac{1}{7}) = (941192 \lessdot_{\frac{7}{3},\frac{1}{7}}(1)(\lessdot_{\frac{7}{5},-\frac{3}{7}}(1))^2(\lessdot_{\frac{7}{6},-\frac{5}{7}}(1))^4)^{\frac{1}{7}}$$

Nota: La fórmula 8-1 fue obtenida por B. Saavedra.- Obsérvese que no aparecen las constantes π ni ∇. Tampoco figuran estas constantes en la fórmula 3-6 para $\Gamma(\frac{1}{3})$.

La siguiente aproximación se obtuvo mediante la fórmula 8-1.

8-2.- $$\Gamma(\frac{1}{7}) = 6.5480629402478244$$

Comentario.- Los resultados anteriores muestran que la "fórmula de duplicación" para la función gama, proporcionada en el Teor. 1, hace posible la obtención de fórmulas explícitas para $\Gamma(u)$ en términos de funciones contráctiles, cuando se conoce el valor de $\Gamma(2u)$.

El método es aplicable particularmente, si u es un número racional.

Las fórmulas obtenidas en cada caso, generan una serie numérica que permite también la evaluación de $\Gamma(u)$ con alta precisión.

Mostraremos ejemplos para $\Gamma(\frac{1}{3}), \Gamma(\frac{2}{3}), \Gamma(\frac{1}{4})$ y $\Gamma(\frac{3}{4})$.

Previamente, es necesario demostrar un teorema.

9.- Teorema.- Si $0 < u < 1$, entonces,

$$\lessdot_{\frac{1}{1-u},\,2u-1}(1) = \frac{1}{4^u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{2u}(1+u,k)}{2^k}$$

Demostración.-

9-1.- $$\lessdot_{\frac{1}{1-u},\,2u-1}(1) = \mathcal{H}_{\frac{1}{1-u},\,2u-1}(1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(1\oplus 1)^{2u+k}.1^{(2u-1,k\,|\,\frac{1}{1-u})}$$

$$= \frac{1}{4^u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{2u}(1+u,k)}{2^k}$$

$\vdash$

Obsérvese que la demostración del Teor. 9 ha sido tomada del Teor. II. 8.

Nota: El Teor. 9 implica,

9-2.- $$\angle_{\frac{1}{1-u},2u-1}(1)=\frac{1}{4^{u}}\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2u.(2u+1).\cdots.(2u+k)}{2^{k+1}.(u+1)(u+2).\cdots.(u+1+k)})$$

Las siguientes fórmulas se obtuvieron mediante la aplicación de 9-2.

9-3.- $$\angle_{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}}(1)=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2.5.7.\cdots.(2+3k)}{2^{k+1}.4.7.10.\cdots.(4+3k)})$$

9-4.- $$\angle_{3,\frac{1}{3}}(1)=\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4.7.10.\cdots.(4+3k)}{2^{k+1}.5.8.11.\cdots.(5+3k)})$$

9-5.- $$\angle_{\frac{4}{3},-\frac{1}{2}}(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1.3.5.\cdots.(1+2k)}{5.9.13.\cdots.(5+4k)})$$

9-6.- $$\angle_{4,\frac{1}{2}}(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3.5.7.\cdots.(3+2k)}{7.11.15.\cdots.(7+4k)})$$

Introduciendo las fórmulas 9-3, 9-4, 9-5 y 9-6 en 3-3, 4-4, 5-2 y 5-4 respectivamente, se tiene:

10.- $$\Gamma(\frac{1}{3})=(9\nabla\sqrt[3]{2}\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2.5.7.\cdots.(2+3k)}{2^{k+1}.4.7.10.\cdots.(4+3k)}))^{\frac{1}{3}}$$

11.- $$\Gamma(\frac{2}{3})=(\frac{3}{4}\nabla\sqrt[3]{4}\,(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4.7.10.\cdots.(4+3k)}{2^{k+1}.5.8.11.\cdots.(5+3k)}))^{\frac{1}{3}}$$

12.- $$\Gamma(\frac{1}{4})=2(\sqrt{2\pi}(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1.3.5.\cdots.(1+2k)}{5.9.13.\cdots.(5+4k)}))^{\frac{1}{2}}$$

13.- $$\Gamma(\frac{3}{4})=(\frac{\sqrt{2\pi}}{3}(1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3.5.7.\cdots.(3+2k)}{7.11.15.\cdots.(7+4k)}))^{\frac{1}{2}}$$

Comentario.- La fórmula 9-6, junto a la 5-3 tiene implicaciones teóricas relevantes.

Por ejemplo, considérese la conocida fórmula

14.- $$AGM(a,a\sqrt{2})=a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma^{2}\left(\frac{3}{4}\right)\qquad,\qquad a\geq 0$$

Donde $AGM(a,a\sqrt{2})$ es la Media Aritmética-Geométrica de $(a,a\sqrt{2})$.

Luego,

14-1.- $$AGM(a,a\sqrt{2})=\frac{4a\sqrt{2}}{3}\angle_{4,\frac{1}{2}}(1)\qquad,\qquad(5\text{-}3)$$

Si $a = 1$ se tiene,

14-2.- $$\mathrm{AGM}(1, \sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \measuredangle_{4, \frac{1}{2}}(1)$$

De 14-2 se deduce,

14-3.- $$G = \frac{3}{4\sqrt{2}} (\measuredangle_{4, \frac{1}{2}}(1))^{-1}$$

Donde $G = (\mathrm{AGM}(1, \sqrt{2}))^{-1}$ es la constante de Gauss.

Introduciendo ahora la formula 9-6 en 14-3 queda,

14-4.- $$G = \frac{3}{2}\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3.5.7.\cdots.(3+2k)}{7.11.15.\cdots.(7+4k)}\right)^{-1}$$

De 14-3 se obtiene también la siguiente representación integral para la constante G de Gauss.

14-5.- $$G = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}} \, dx \right)^{-1}$$